מבוא לתורת הקבוצות, לוגיקה מתמטית

תורת הקבוצות

הגדרה: קבוצה A היא אוסף של איברים.

דוגמאות:

1. כל הסטודנטים שנולדו בחודש מרץ.
2. כל הישרים המקבילים לציר y.
3. קבוצה ריקה היא קבוצה בלי איברים. סימון: $\emptyset$.

הערות:

1. מקובל לסמן קבוצה באות אנגלית גדולה ואיבר בקבוצה באות אנגלית קטנה.
2. קבוצה יכולה להיות סופית (דוגמה 1) או אינסופית (דוגמה 2)
3. רושמים את אברי הקבוצה בתוך סוגריים מסולסלות. למשל, $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. איבר נכלל פעם אחת בקבוצה. למשל, $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

סימון: $x \in A$ ־איבר x שייך לקבוצה A. $x \notin A$ ־x לא שייך לקבוצה A.

דוגמה: עבור $B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$. מתקיים $8 \in B$ אבל $5 \notin B$.

קבוצות מספרים מיוחדות (מופיע בקליפים):

1. $\mathbb{N}$ ־ המספרים הטבעיים, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (לפעמים משייכים גם אתה־0 לקבוצה) .
2. $\mathbb{Z}$ ־ המספרים השלמים, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
3. $\mathbb{Q}$ ־ המספרים הרציונליים, מנות של מספרים שלמים, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. $\mathbb{R}$ ־ המספרים הממשיים ־ קבוצת המספרים הרציונליים והאי רציונליים (אלה שאי אפשר לכתוב כמנה של שני מספרים שלמים, למשל $\sqrt{2}, \pi, e$).

הגדרות: נתונות שתי קבוצות A, B.

1. נאמר ש- A מוכלת ב-B (סימון: $A \subseteq B$) אם כל איבר ב-A נמצא גם ב-B.
במקרה זה נוכל להגיד ש-A תת קבוצה של B.
2. נאמר שהקבוצות A, B שוות (סימון: $A = B$) אם כל איבר ב-A נמצא ב-B וכל איבר ב-B נמצא ב-A.

דוגמאות:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}, B = \{1, 4, 7\}$. מתקיים $B \subseteq A$.
2. $A = \{1, 2, 7, 9\}, B = \{2, 3, 4, 7\}$. מתקיים $B \nsubseteq A$ וגם $A \nsubseteq B$.
3. מתקיים $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

תכונות:

1. $A \subseteq A$
2. אם $A \subseteq B$ ו-$B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.
3. אם $A \subseteq B$ ו-$B \subseteq A$ אז $A = B$.

תרגיל: רשמו את כל האיברים בקבוצות הבאות:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$. פתרון: $A = \{1, -1\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -5\}$. פתרון: $B = \emptyset$.
3. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. פתרון $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
4. $D = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}, |k| < 4\}$. פתרון: $D = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$.

הערה: באופן רשמי נרשום $A = \{x \mid x \in P(x)\}$ (כמו בדוגמה 4)
אם A היא תת קבוצה של קבוצה גדולה יותר B ניתן לרשום $A = \{x \in B \mid x \in P(x)\}$.
בדרך כלל B תהיה אחת מהקבוצות המיוחדות שרשומות למעלה (כמו בדוגמאות 1-3).

תרגיל: רשמו בצורה מתמטית את הקבוצות הבאות:

1. כל המספרים הטבעיים הזוגיים: $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$
2. קבוצת כל המספרים השלמים בין 32 ל- 432 (לא כולל את המספרים 32 ו-432):
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 < x < 432\}$
3. כל הנקודות במישור הנמצאות על ציר y: $C = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

הגדרה: נתונות שתי קבוצות A, B.

חיתוך של קבוצות $A \cap B$ - קבוצת האיברים המשותפים ל-A ול-B, כלומר

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

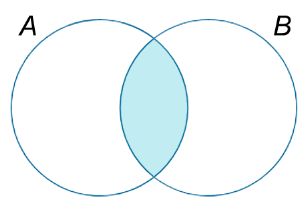
איחוד של קבוצות $A \cup B$ - קבוצת האיברים ב-A וב-B ביחד, כלומר

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

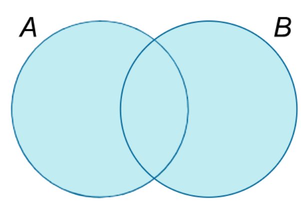
.

הערה: ניתן לתאר חיתוך ואיחוד של קבוצות בעזרת דיאגרמות שנקראות דיאגרמות ון:

חיתוך:



איחוד:



דוגמה: עבור קבוצות $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{x, b, y, e, z\}$ מקבלים:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}, \quad A \cap B = \{b, e\}$$

.

לוגיקה מתמטית

קשרים לוגיים: לצורך הדגמה נשתמש בשתי הטענות הבאות:

1. אכלתי פלפל
2. שתיתי מיץ

נשתמש בטבלה הבאה:

קשר לוגי	דוגמאות
וגם	אכלתי פלפל וגם שתיתי מיץ
או	אכלתי פלפל או שתיתי מיץ
גרירה	אם אכלתי פלפל אז שתיתי מיץ
אם ורק אם (אם"ם)	אכלתי פלפל אם ורק אם שתיתי מיץ

הערות:

1. ניתן לשלב צירופים שונים של קשרים לוגיים.
למשל, אם אכלתי פלפל אז שתיתי מיץ וגם שרתי סרנדה.
2. ניתן לכתוב את אותה הטענה בדרכים שונות.
למשל, הטענה: "אם אכלתי פלפל אז שתיתי מיץ" שקול לטענה: "אם לא שתיתי מיץ אז לא אכלתי פלפל".

כמתים: בנוסף לקשרים לוגיים נשתמש בשני כמתים: לכל $\forall$ וקיים (יש) $\exists$. למשל:

1. כל מספר טבעי הוא שלם.
2. קיים מספר זוגי שהוא ראשוני.

הערה: ניתן לשלב בטענה אחת כמה כמתים וכמה קשרים לוגיים.

שלילה של טענות: לפעמים נרצה להוכיח טענה בעזרת כך שנניח שהיא לא נכונה ונגיע לסתירה. לצורך כך צריך לדעת לנסח שלילה של טענות קיימות:

קשר לוגי	דוגמאות	שלילה
וגם	הביאו לי צ'יפס וגם הביאו לי קולה	לא הביאו לי צ'יפס או לא הביאו לי קולה
או	הביאו לי צ'יפס או הביאו לי קולה	לא הביאו לי צ'יפס וגם לא הביאו לי קולה
גרירה	אם הביאו לי צ'יפס אז הביאו לי קולה	הביאו לי צ'יפס וגם לא הביאו לי קולה
אם ורק אם	הביאו לי צ'יפס אם ורק אם הביאו לי קולה	הביאו לי צ'יפס וגם לא הביאו לי קולה או הביאו לי קולה וגם לא הביאו לי צ'יפס
לכל	כל החתולים שחורים	קיים חתול לא שחור
קיים	קיים חתול כחול	כל החתולים לא כחולים

תרגיל: כתבו שלילה של הטענות הבאות:

1. לכל מספר שלם x מתקיים $x \geq x^2$.
2. לכל מספר שלם x, מתקיים $0 \geq x$.
3. קיים מספר שלם x, כך ש־ $0 \geq x$.
4. קיים מספר שלם x, כך ש־ $1 < x < 0$.
5. כל מספר שלם אי־ זוגי x המקיים $8 < x < 2$ הוא ראשוני.
6. כל מספר שלם אי־ זוגי x המקיים $10 < x < 2$ הוא ראשוני.
7. לכל מספר טבעי x קיים מספר טבעי y המקיים $x + 1 = y$.
8. קיים מספר טבעי y כך שלכל מספר טבעי x מתקיים $x + 1 = y$.

פתרון:

1. קיים מספר שלם x כך ש־ $x < x^2$.
2. קיים מספר שלם x כך ש־ $0 < x$.
3. לכל מספר שלם x, מתקיים $0 < x$.
4. לכל מספר שלם x לא מתקיים $1 < x < 0$.
   אפשרות נוספת: לכל מספר שלם x מתקיים $1 \geq x$ או $0 \leq x$.
5. קיים מספר שלם אי־זוגי x המקיים $8 < x < 2$ שהוא לא ראשוני.
6. קיים מספר שלם אי־זוגי x המקיים $10 < x < 2$ שהוא לא ראשוני.
7. קיים מספר טבעי x כך שלכל מספר טבעי y מתקיים $x + 1 \neq y$.
8. לכל מספר טבעי y קיים מספר טבעי x המקיים $x + 1 \neq y$.

כללי הוכחה או הפרכה:

1. טענת "לכל" ־ מוכיחים את המקרה הכללי.
2. טענת "קיים" ־ מביאים דוגמה מתאימה.
3. כאשר רוצים להפריך / לסתור טענה, מוכיחים את השלילה שלה.
4. הוכחה בערת שלילה: מניחים שהמסקנה דווקא לא נכונה ואז מגיעים לסתירה של הנתון או לסתירה מתמטית.

תרגיל: הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

1. לכל מספר שלם x מתקיים x^2 גדול או שווה מ־x.
2. לכל מספר שלם x, מתקיים $x \geq 0$.
3. קיים מספר שלם x, כך ש־ $x \geq 0$.
4. קיים מספר שלם x, כך ש־ $0 < x < 1$.
5. כל מספר שלם אי־ זוגי x המקיים $2 < x < 8$ הוא ראשוני.
6. כל מספר שלם אי־ זוגי x המקיים $2 < x < 10$ הוא ראשוני.
7. לכל מספר טבעי x קיים מספר טבעי y המקיים $y = x + 1$.
8. קיים מספר טבעי y כך שלכל מספר טבעי x מתקיים $y = x + 1$.

פתרון:

1. הטענה נכונה: נפריד למקרים: אם $x \geq 1$ אז על פי כללי אי שוויונים $x^2 = x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$, $0^2 = 0$, אם $x < 0$ אז $x < 0 < x^2$. קיבלנו שלכל x שלם מתקיים $x^2 > x$.
2. הטענה לא נכונה: לכן צריך להוכיח את השלילה, כלומר צריך להוכיח שקיים מספר שלם x כך ש־ $x < 0$ ואכן קיים $x = -1 < 0$ שלם.
3. הטענה נכונה: כדי להוכיח את הטענה מספיק להראות דוגמה של מספר שמקיים את הנתון: $x = 1$ היא דוגמה למספר דרוש.
4. הטענה לא נכונה: צריך להוכיח את השלילה של הטענה: כלומר צריך להוכיח שכל מספר שלם x לא מקיים $0 < x < 1$.
נוכיח בשלילה. נניח בשלילה שקיים x שלם המקיים $0 < x < 1$. מתקיים שהפרש בין שני מספרים שלמים הוא לפחות 1. כיוון ש־x שלם מתקיים $x = x - 0 \geq 1$ בסתירה להנחה. לכן הנחת השלילה לא נכונה, ולא קיים x שלם, המקיים $0 < x < 1$.
5. הטענה נכונה: כל המספרים האי זוגיים בין 2 ל־8 הם $\{3, 5, 7\}$ והם כולם ראשוניים.
6. הטענה לא נכונה: המספר 9 הוא מספר אי זוגי בין 2 ל־10 והוא לא ראשוני.
7. הטענה נכונה: כיוון שלכל מספר טבעי יש מספר טבעי שעוקב לו אז לכל מספר טבעי x קיים y העוקב ל־x, כלומר $y = x + 1$.
8. הטענה לא נכונה: לכל מספר טבעי y נבחר $x = y$ ומתקיים $y \neq x + 1$. וזה מוכיח את השלילה של הטענה.