מבחן סיווג במתמטיקה 3.9.2015

מס' סטודנט: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ פקולטה: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0.
סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
שאלה 20	
סה"כ	

שאלה מס' 1 (5 נקודות)

מצאו זווית α ש־$\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$ ו־$\tan(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. כתבו את התשובה ברדיאנים.

פתרון: על פי סימני הפונקציות, הזווית היא ברביע הרביעי. התשובה: $-\frac{\pi}{6}$

שאלה מס' 2 (5 נקודות)

מצאו זווית β ש־$\sin(\beta) = -\frac{1}{2}$ ו־$\tan(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ו־$20 \le \beta \le 26$ (שוב, הנתון הוא ברדיאנים וגם התשובה צריכה להיות ברדיאנים).

פתרון: צריך להוסיף לתשובה הקודמת כפולות של 2π עד שנגיע למספר רדיאנים שהוא בין 20 ל־26. הוסיפו $4 \times 2\pi$, ותקבלו $7\frac{5}{6}\pi$.

שאלה מס' 3 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ ש־$f(-3) = f'(-3) = f''(-3) = f'''(-3) = 0$ ו־$f''''(-3)$ (הנגזרת הרביעית ב־-3) שווה 240.

פתרון: $10(x+3)^4$

שאלה מס' 4 (5 נקודות)

כתבו פולינום ריבועי שמקבל את המינימום שלו בנקודה $x = 2$, ערכו שם הוא 2, וערכו ב־$x = 0$ הוא 3.

פתרון: הפולינום הוא מן הצורה $a(x-2)^2 + 2$. מן התנאי שהערך ב־0 הוא 3 מקבלים $4a + 2 = 3$, שפירושו ש־$a = \frac{1}{4}$.

שאלה מס' 5 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ו־$f(0) = 0$.

פתרון: $f'(x) = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. **(אפשר להגיע לכך גם בלי הטריק של החסרת 1 והוספת 1 במונה, על ידי חילוק פולינומים ־ זוהי הדרך השיטתית.) לכן $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$, ומן התנאי ש־$f(0) = 0$ נובע (מציבים בביטוי $x = 0$) ש־$C = 0$.**

שאלה מס' 6 (5 נקודות)

מצאו פונקציה שמקבלת מקסימום מקומי רק ב־$x = 1$, מינימום מקומי רק ב־$x = 3$.

פתרון: הנגזרת של הפונקציה מתאפסת ב־$x = 1$ ו־$x = 3$, כלומר $f(x) = A(x-1)(x-3) = A[x^2 - 4x + 3]$. אם תציירו את הפונקציה תראו שהיא שואפת לאינסוף כש־$x \to \infty$, ולכן $A > 0$. אפשר לקחת $A = 1$ (הרי מחפשים רק דוגמה אחת), ונקבל: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, ולכן אפשר לקחת $f(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x$. אפשר כאן להוסיף קבוע ־ אבל כאמור בקשו רק דוגמה של פונקציה אחת.

שאלה מס' 7 (5 נקודות)

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ מוגדרת על כל הישר, המקיימת: $f(x) < 5$ לכל x ו: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$.

פתרון: דוגמאות אפשריות: $f(x) = 5 - 2^x$, או $5 - \frac{1}{1+x^2}$, או $f(x) = -5 \times \frac{2}{\pi} \arctan x$. מי שכתב $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$ קיבל 3 נקודות ־ הפונקציה הזאת אינה מוגדרת על כל הישר.

שאלה מס' 8 (5 נקודות)

a הוא מספר המקיים: למערכת אי השוויונות $|x-11| \le 2a$, $|x-5| \le a$ יש בדיוק פתרון אחד. מהו a?

פתרון: a הוא שליש המרחק בין 11 לבין 5, כלומר 2. הכי טוב לצייר על הציר הממשי.

שאלה מס' 9 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ שקבוצת הפתרונות של אי השוויון $f(x) \geq 0$ היא $[0,1] \cup [2,3]$ (כאן $A \cup B$ מציין איחוד של A ו־B).

פתרון: $-x(x-1)(x-2)(x-3)$. **ברור שמבחינת חילופי הסימנים זה עובד, השאלה היא מהו הסימן לפני המכפלה. ציירו את גרף הפונקציה, היווכחו שאם מדובר במכפלה מן הסוג הזה, הפונקציה שואפת למינוס אינסוף כאשר** $x \to \infty$**, ולכן נחוץ סימן המינוס לפני המכפלה.**

שאלה מס' 10 (5 נקודות)

תהא $f(x) = 1 - (\sin(\arccos x))^2$. חשבו את $f'(\frac{1}{2})$.

פתרון: אפשר להשתמש בנוסחה לנגזרת של הרכב של פונקציות. יותר פשוט: נסמן $\arccos x = \alpha$**. אז** $\cos\alpha = x$**, ולכן** $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$**, לכן** $(\sin(\arccos x))^2 = 1 - x^2$**, ולכן** $1 - (\sin(\arccos x))^2 = 1 - (1-x^2) = x^2$ **ולכן** $f'(x) = 2x$**. לאחר הצבה מקבלים שהנגזרת היא** 1**.**

שאלה מס' 11 (5 נקודות)

תהא $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. שימו לב ש־$f(1+e) = \frac{(1+e)^2}{e}$. נסמן: $a = \frac{(1+e)^2}{e}$. תהא $g(x)$ הפונקציה ההפוכה של $f(x)$. חשבו את $g'(a)$.

פתרון: הנגזרת של הפונקציה ההפוכה היא 1 **חלקי הנגזרת של הפונקציה המקורית, באותה נקודה.** $g'(a) = \frac{1}{f'(1+e)}$**. חילוק פולינומים נותן** $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$**, ולכן הנגזרת היא** $1 - \frac{1}{(x-1)^2}$**. הציבו** $x = 1+e$ **ותקבלו -** $\frac{e^2-1}{e^2}$**.**

שאלה מס' 12 (5 נקודות)

נתון $a = \log_5(7)\,,\ b = \log_2(5)$. הביעו באמצעות a, b את הביטוי $\log_{10}(14)$.

רמז: תחילה, הביעו באמצעות a, b את הביטוי $\log_5(14)$.

פתרון: נשתמש בנוסחה לשינוי בסיס: $\log_2(5) = \frac{\log_5(5)}{\log_5(2)} = \frac{1}{\log_5(2)}$**, כלומר** $\log_5(2) = \frac{1}{b}$**. לכן לפי הנוסחה ללוגריתם של מכפלה מקבלים** $\log_5(14) = \log_5(7) + \log_5(2) = a + \frac{1}{b}$**. כתוצאה מכך,** $\log_{10}(14) = \frac{\log_5(14)}{\log_5(10)} = \frac{\log_5(14)}{\log_5(5)+\log_5(2)} = \frac{a+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b}} = \frac{ab+1}{b+1}$**.**

שאלה מס' 13 (5 נקודות)

חשבו:

$$\lim_{x\to 1} \frac{50\sin(\pi x)}{1-x}$$

רמז: החליפו את x במשתנה $y = 1 - x$.

פתרון: נציב $y = 1 - x$**. אזי** $x = 1 - y$**, ולכן הגבול הוא:**

$$\lim_{y\to 0} \frac{50\sin(\pi(1-y))}{y} = 50\lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi 1 - \pi y)}{y} = 50\lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y)}{y} = 50\pi.$$

השתמשנו כאן בשוויון $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ **ובגבול** $\lim_{y\to 0}\sin y/y = 1$**.**

שאלה מס' 14 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת:

1. $\lim_{x\to 8} f(x) = 0$

2. $\lim_{x\to 8}\frac{f(x)}{x-8}=11$

3. $f\left(x\right)$ לא לינארית.

פתרון: $f(x)=11(x-8)+(x-8)^2$ **(הגורם האחרון הוא כדי שהפונקציה לא תהיה ליניארית.) דוגמה נוספת:** $f(x)=\frac{11}{8}x(x-8)$ **.**

שאלה מס' 15

המספרים $x,16,y$ מהווים סדרה חשבונית. אם כופלים את המספר השמאלי, x, פי 8, את המספר האמצעי משאירים ללא שינוי, ומוסיפים 7 למספר הימני מקבלים סדרה חשבונית אחרת. מצאו את x ו־y.

פתרון: העובדה שהסדרה הנתונה היא חשבונית משמעה שההפרש בין האיבר השני לראשון שווה להפרש בין השלישי לשני, כלומר $x=16-a,\ y=16+a$**. הנתון משמעותו שהסדרה** $8\times(16-a),\ 16,\ 16+a+7$ **היא סידרה חשבונית. דרך אחת לכתוב זאת היא שהאיבר האמצעי הוא הממוצע בין שני הקיצוניים, כלומר**

$$16=\frac{8\times(16-a)+16+a+7}{2}.$$

פתרון המשוואה הזאת נותן $a=17$**.**

דרך נוספת: שתי הסדרות הן: $x,16,y$ **ו־** $8x,16,y+7$**. כיוון ששתי הסדרות חשבוניות, ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע, כלומר:** $16-x=y-16,\ 16-8x=y+7-16$**. מפתרון המערכת, מקבלים ש־** $x=-1,y=33$ **כלומר ההפרש של הסדרה המקורית הוא** 16**.**

שאלה מס' 16 (5 נקודות)

תהי $f\left(x\right)=a\cos\left(bx+c\right)+d$. מצאו פרמטרים a,b,c,d המקיימים: $a,b\geq 0,0\leq c<2\pi$ כאשר נתון כי f מקיימת את ארבעת התנאים הבאים:

1. $f\left(0\right)=56$.

2. המקסימום של $f\left(x\right)$ הוא 56.

3. המינימום של $f\left(x\right)$ הוא 34.

4. מחזור הפונקציה הוא $\frac{4\pi}{3}$.

(הערה: הפרמטרים האלה אינם דווקא יחידים ־ל־c יש יותר מתשובה אחת. מדוע?)

פתרון: הפונקציה מתנדנדת בין המקסימום למינימום, במרווחים שווים, לכן d **הוא האמצע בין המקסימום למינימום, כלומר** $d=\frac{56+34}{2}=45$**.**

המקסימום של פונקצית הקוסינוס מתקבל ב־$x=0$**, ולכן אפשר לקחת** $c=0$**.**

מכיוון שהמחזור של קוסינוס הוא 2π**, ומחזור הפונקציה הוא** $\frac{4\pi}{3}$**, מתקבל ש־**$\frac{4\pi}{3}b=2\pi$**, כלומר** $b=\frac{3}{2}$**.**

התנאי $f\left(0\right)=56$ **אומר ש־**$a+d=56$**, כלומר** $a+45=56$**, לכן** $a=11$ **(שזו בעצם המשרעת של הפונקציה).**

מי שמצא שניים מן הפרמטרים קיבל את מלוא הנקודות.

שאלה מס' 17 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $\frac{\ln|x|}{x}$.

פתרון: $\frac{(\ln|x|)^2}{2}$ **- גזרו כדי להבין למה. זהו סוג של אינטגרל שבו מופיעה באינטגרל נגזרת פנימית. הנגזרת של** $\ln|x|$ **היא** $\frac{1}{x}$ **(במבחן השאלה הופיעה ללא ערך מוחלט ולכן גם התשובה התקבלה ללא ערך מוחלט).**

שאלה מס' 18 (5 נקודות)

יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים כך ש־ $|\vec{a}|=4,\left|\vec{b}\right|=2$ וכאשר α היא הזווית ביניהם. נסמן $c=\cos(\alpha)$. נגדיר את הוקטורים $\vec{u}=\vec{a}+t\vec{b},\vec{v}=\vec{a}-2\vec{b}$ כאשר t סקלר ממשי כלשהו. מצאו t כך שהוקטורים $\vec{u},\vec{v}$ יהיו ניצבים.

פתרון: כדי ששני הוקטורים יהיו ניצבים, המכפלה הסקלרית ביניהם צריכה להיות 0, כלומר $0=(\vec{a}+t\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2+(t-2)|\vec{a}||\vec{b}|c-2t|\vec{b}|^2=16+(t-2)8c-8t$. לאחר העברת אגפים וצמצום מקבלים $t=2$ (שימו לב, שאם $c=1$ אז הוקטורים המקוריים בעלי אותו כיוון ואז גם הוקטורים החדשים יהיו בעלי אותו כיוון ולא יהיו ניצבים.)

שאלה מס' 19 (5 נקודות)

נתון:

$$\vec{v}=5\hat{i}+8\hat{j}+2\hat{k}$$
$$\vec{w}=5\hat{i}+12\hat{j}+4\hat{k}$$

מצאו וקטור $\vec{u}\neq\vec{0}$ שניצב לשניהם.

פתרון: אם וקטור ניצב לשני וקטורים אחרים הוא גם ניצב לוקטור ההפרש של שני הוקטורים, כלומר הוקטור $\vec{u}=(a,b,c)$ ניצב לוקטור $(0,4,2)=\vec{w}-\vec{v}$. מהמכפלה הסקלרית, מקבלים $c=-2b$. כעת, נדרוש ניצבות עם אחד הוקטורים האחרים, למשל, $0=(a,b,c)(5,8,2)=5a+8b+2c=5a+8b-4b$, כלומר $a=-\frac{4}{5}b$. כיוון שמה שחשוב לנו זה הכיוון של הוקטור, יש אינסוף פתרונות וכל תשובה מהצורה $(-\frac{4}{5}b,b,-2b)$ תהיה נכונה.

שאלה מס' 20 (5 נקודות)

נתון

$$\vec{u}=5\hat{i}+8\hat{j}+2\hat{k}$$

1. מצאו וקטור יחידה $\vec{v}$ כך ש־ $|\vec{u}+\vec{v}|$ מקסימלי.
2. מצאו וקטור יחידה $\vec{w}$ כך ש־ $|\vec{u}+\vec{w}|$ מינימלי.

פתרון: כדי שסכום יהיה מקסימלי צריך שוקטור היחידה יהיה באותו כיוון כמו $\vec{u}$, וכדי שסכום יהיה מינימלי צריך שוקטור היחידה יהיה בכיוון הפוך לזה של $\vec{u}$. כלומר: $\vec{v}=\vec{u}/|\vec{u}|=\vec{u}/\sqrt{93}$, ו־$\vec{w}=-\vec{v}$.