

## מבחן סיווג במתמטיקה 4.9.2020 - פתרון

### שאלה מס' 1

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים האיבר הראשון הוא  $1+i$  והאיבר השני הוא 2. אז לכל  $n$  טבעי האיבר  $a_{4n+2}$  שווה ל:

**פתרון:** מתקיים  $a_1 = 1+i$  ו-  $q = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$  . לכן

$$a_{4n+2} = a_1 q^{4n+1} = (1+i)(1-i)^{4n+1} = (1+i)(1-i)(1-i)^{4n} =$$

$$= 2 \left( (1-i)^2 \right)^{2n} = 2 \cdot (2i)^{2n} = 2 \cdot 2^{2n} (i^2)^n = (-1)^n 2^{2n+1}$$

דרך נוספת:  $1-i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{4} \right)$  לכן

$$(1-i)^{4n} = \left( \sqrt{2} \right)^{4n} \operatorname{cis} \left( 4n \cdot \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2^{2n} \operatorname{cis} (-\pi n) = 2^{2n} (-1)^n$$

כלומר

$$a_{4n+2} = (1+i)(1-i)^{4n+1} = (1+i)(1-i)(1-i)^{4n} = 2 \cdot 2^{2n} (-1)^n = 2^{2n+1} (-1)^n$$

**הערה:** בחלק מהטורים תשובה זו הופיעה פעמיים. שתי הסעיפים בהם הופיעה תשובה זו התקבלו כנכונים.

### שאלה מס' 2

יהא מישור המוגדר על ידי המשוואה  $x + 3y + 2z - 1 = 0$ . תהא נקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה  $P(1, 0, -1)$ . מצאו את  $Q$ .

**פתרון:** נסמן  $Q(a, b, c)$ . כיוון ש-  $Q$  היא נקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה  $P$ , הוקטור  $\vec{PQ}$  מקביל לנורמל של המישור  $(1, 3, 2)$ , לכן

$$(a-1, b, c+1) = t(1, 3, 2) = (t, 3t, 2t)$$

לכן  $Q(t+1, 3t, 2t-1)$ . מצד שני, הנקודה נמצאת על המישור ולכן מקיימת את משוואת המישור, כלומר

$$t+1 + 3 \cdot 3t + 2 \cdot (2t-1) - 1 = 0 \Rightarrow 14t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{7}$$

$$Q\left(\frac{1}{7} + 1, \frac{3}{7}, \frac{2}{7} - 1\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right) \quad \text{נציב ונקבל}$$

### שאלה מס' 3

נתונים וקטורים  $\vec{u}, \vec{v}$ . נגדיר שני וקטורים חדשים:  $\vec{a} = |\vec{v}| \vec{u} + |\vec{u}| \vec{v}$  ו-  $\vec{b} = |\vec{u}| \vec{v} - |\vec{v}| \vec{u}$ .  
בנוסף נתון כי  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . אז הזווית בין הוקטורים  $\vec{a}, \vec{b}$  היא

**פתרון:** מתקיים  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ . נחשב תחילה את המכפלה הסקלרית בין הוקטורים  $\vec{a}, \vec{b}$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{v}| \vec{u} + |\vec{u}| \vec{v}) \cdot (|\vec{u}| \vec{v} - |\vec{v}| \vec{u}) = |\vec{v}| |\vec{u}| \vec{u} \cdot \vec{v} - |\vec{v}|^2 \vec{u} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2 \vec{v} \cdot \vec{v} - |\vec{u}| |\vec{v}| \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{לכן } \cos \alpha = 0 \text{ ו- } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

### שאלה מס' 4

הגבול  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\pi x - \pi}$  שווה:

**פתרון:** הנוסחה מזכירה את הגדרת הנגזרת. נסמן  $f(x) = \arctan x$ . הפונקציה גזירה בכל נקודה ומתקיים:  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

על פי הגדרת הנגזרת ב- $x = 1$  מתקיים:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{\pi x - \pi} = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{\pi} f'(1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2\pi}$$

### שאלה מס' 5

נתון מספר מרוכב  $z$  המקיים  $z \neq -1$  ו- $|z| = 1$ . נסמן  $w = \frac{z-1}{z+1}$ . אז בהכרח מתקיים:

**פתרון:** נחשב

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)(\overline{z+1})} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} + \frac{2i \operatorname{Im}(z)}{|z+1|^2} = \frac{2i \operatorname{Im}(z)}{|z+1|^2} i$$

$$\operatorname{Re}(w) = 0 \quad \text{זהו מספר מדומה טהור ולכן}$$

### שאלה מס' 6

נסמן  $\log_{10} 2 = a$ . אז:  $\log_{\sqrt{10}} 5$  שווה ל:

**פתרון:**

$$\log_{\sqrt{10}} 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} \sqrt{10}} = 2 \log_{10} \frac{10}{2} = 2 (\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 2(1 - a)$$

### שאלה מס' 7

איזה מהביטויים הבאים מופיע בפיתוח הבינום של  $(x^6 + y^5)^7$  עם מקדם שונה מאפס?

**פתרון:** נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון

$$(x^6 + y^5)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (x^6)^k (y^5)^{7-k} = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^{6k} y^{5(7-k)}$$

מהאפשרויות בשאלה  $6k = 12$  ואז  $k = 2$  או  $6k = 18$  ואז  $k = 3$ .

עבור  $k = 2$  נקבל  $7 - k = 5$  ואז החזקה של  $y$  היא  $5 \cdot 5 = 25$

עבור  $k = 3$  נקבל  $7 - k = 4$  ואז החזקה של  $y$  היא  $5 \cdot 4 = 20$

לכן האפשרות היחידה שמתאימה היא  $x^{12}y^{25}$ .

### שאלה מס' 8

מספר המספרים השלמים עבורם הפונקציה  $f(x) = \log_2(x^2 - 2x) - 3$  מקיימת

$$f(x) \leq 0 \text{ הוא:}$$

**פתרון:** נבדוק תחילה את תחום ההגדרה של הפונקציה.

$$f(x) \text{ מוגדרת כאשר } x^2 - 2x = x(x - 2) > 0,$$

כלומר, עבור  $x > 2$  או  $x < 0$  מתקיים

$$\log_2(x^2 - 2x) - 3 = \log_2(x^2 - 2x) - \log_2 8 = \log_2 \left( \frac{x^2 - 2x}{8} \right) \leq 0$$

אם  $\frac{x^2 - 2x}{8} \leq 1$ , כלומר  $x^2 - 2x \leq 8$  ולכן מחפשים מספרים שלמים שמקיימים  $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) \leq 0$ .

זוהי פרבולה מחייכת ולכן התחום הדרוש הוא  $[-2, 4]$ . החיתוך בין תחום הגדרה לתחום שמצאנו הוא:  $[-2, 0) \cup (2, 4]$ .

המספרים השלמים בתחום זה הם  $-2, -1, 3, 4$  ויש 4 מספרים.

### שאלה מס' 9

המחוקק בין הערך המקסימלי והמינימלי בתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{16 - (2^{x-3})^x}$  הוא:

**פתרון:** תחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $16 - (2^{x-3})^x = 2^4 - 2^{x^2-3x} \geq 0$  , לכן  $2^4 \geq 2^{x^2-3x}$  , לכן  $x^2 - 3x \leq 4$  , כלומר  $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) \leq 0$  ,  $-1 \leq x \leq 4$  .  
לכן. המחוקק בין הערך המקסימלי והמינימלי של תחום ההגדרה הוא 5.

### שאלה מס' 10

נתונה הסדרה  $a_n$  המוגדרת על ידי נוסחת נסיגה:  $a_1 = 6, a_{n+1} = 2a_n$  . אז סכום 99 האיברים הראשונים של הסדרה הוא:

**פתרון:** נמצא את האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_1 = 6, a_2 = 2 \cdot 6 = 12, a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24, \dots, a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

זוהי בעצם סדרה הנדסית.  $a_1 = 6, q = 2$  . לכן, סכום 99 האיברים הראשונים הוא

$$S_{99} = \frac{a_1(1 - q^{99})}{1 - q} = \frac{6(1 - 2^{99})}{1 - 2} = 6 \cdot (2^{99} - 1) = 6 \cdot 2^{99} - 6 = 3 \cdot 2^{100} - 6$$

### שאלה מס' 11

נתון פולינום  $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$  ונתון ש-  $x_0$  הוא שורש של הפולינום. נסמן  $q(x) = x^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$  . אז בהכרח אחד משורשי  $q(x)$  הוא:

**פתרון:** מהנתון מתקיים  $p(x_0) = x_0^5 + ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + 1 = 0$  . נשים לב, שאם  $x_0 = 0$  נקבל  $1 = 0$  וזו סתירה. לכן בהכרח  $x_0 \neq 0$  . נחלק את המשוואה ב-  $x_0^5$  ונקבל

$$1 + a \cdot \frac{1}{x_0} + b \cdot \frac{1}{x_0^2} + c \cdot \frac{1}{x_0^3} + d \cdot \frac{1}{x_0^4} + \frac{1}{x_0^5} = 0$$

$q\left(\frac{1}{x_0}\right) = \left(\frac{1}{x_0}\right)^5 + d \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)^4 + c \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right) + 1 = 0$  . לכן  $\frac{1}{x_0}$  הוא בהכרח שורש של הפולינום  $q(x)$  .

### שאלה מס' 12

למשוואה  $x^4 + 2px^2 + q = 0$  יש 4 פתרונות ממשיים אם:

**פתרון:** נסמן  $t = x^2$ . למשוואה הנתונה יש 4 פתרונות ממשיים אם למשוואה  $t^2 + 2pt + q = 0$  יש שני פתרונות ממשיים חיוביים.

למשוואה שני פתרונות ממשיים אם  $\Delta = 4p^2 - 4q > 0$ , כלומר  $p^2 > q$ .

נסמן  $t_1, t_2$  שני פתרונות ממשיים חיוביים של המשוואה.

על פי וייטה מתקיים  $t_1 + t_2 = -2p > 0$  כלומר  $p < 0$  ו-  $t_1 \cdot t_2 = q > 0$ .

לכן למשוואה המקורית יש 4 פתרונות אם  $p < 0$  ו-  $0 < q < p^2$ .

### שאלה מס' 13

נתון ש-  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  או  $\frac{\tan(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})}$  שווה ל:

**פתרון:** מתקיים

$$\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**הערה:** גם אם ידוע ש-  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  אומר ש-  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , לא ידוע למה שווה  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### שאלה מס' 14

נתונה פונקציה גזירה והפיכה  $f(x)$  ונתון ש-  $f(x_0) = y_0$ . יהא  $a \neq 0$ .

נתון ש-  $f'(x_0) = a$  ו-  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{6}{2a+3}$ . אז  $a$  שווה ל:

**פתרון:** מתקיים

$$\frac{6}{2a+3} = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{a} \Rightarrow 6a = 2a + 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

### שאלה מס' 15

נתון כי לפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$  יש נקודת קיצון ב-  $x = 1$  ונקודת פיתול ב-  $x = -1$  אז  $a + b$  שווה ל:

**פתרון:** מתקיים  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9$ .  
 נתון ש-  $x = 1$  היא נקודת קיצון ולכן  $f'(1) = 0$ , כלומר  $3a + 2b - 9 = 0$ .  
 מתקיים  $f''(x) = 6ax + 2b$ .  
 נתון ש-  $x = -1$  היא נקודת פיתול ולכן  $f''(-1) = 0$ , כלומר  $-6a + 2b = 0$ .  
 ולכן  $b = 3a$ .  
 נציב במשוואה הראשונה ונקבל:  $3a + 6a - 9 = 0$ , לכן  $a = 1$ ,  $b = 3$  ו-  $a + b = 4$ .

### שאלה מס' 16

חשבו:  $\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx$

**פתרון:**

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1} = \frac{1}{2} \arctan(2x) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

### שאלה מס' 17

נתונות 3 פונקציות  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $h(x) = \cos x$ .  
 אז  $(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$  שווה ל:

**פתרון:**

$$(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = f(\sin x) + f(\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

שאלה מס' 18

חשבו:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x^2+7}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2+7-16)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2-1)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x^2+7}+4)} = \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

שאלה מס' 19

ההפרש בין המינימום והמקסימום הגלובליים של הפונקציה  $f(x) = 3x^2 - |x-1|$  בתחום  $[0, 2]$  הוא:

פתרון: נכתוב את הפונקציה בצורה מפורטת:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1 & x \geq 1 \\ 3x^2 + x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

נחפש נקודות קיצון בתחום  $[0, 2]$ . יש שלושה סוגים של מועמדים לקיצון.

- קצוות הקטע:  $x = 0, x = 2$ .
- נקודות בהן הפונקציה לא גזירה:  $x = 1$ .
- נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: בקטע  $(1, 2)$   $f'(x) = 6x - 1 = 0$  עבור  $x = \frac{1}{6}$  - לא בתחום. בקטע  $(0, 1)$   $f'(x) = 6x + 1 = 0$  עבור  $x = -\frac{1}{6}$  - לא בתחום. נציב את 3 המועמדות ונקבל:

$$f(0) = -1, f(1) = 3, f(2) = 11$$

לכן מינימום גלובלי הוא  $-1$  והמקסימום הגלובלי הוא  $11$  וההפרש ביניהם הוא  $12$ .

שאלה מס' 20

נתון כי הסדרה  $\log_5 a_1, \log_5 a_2, \dots, \log_5 a_n$  היא סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא  $3$  וההפרש הוא  $-\frac{1}{2}$ . חשבו את  $a_7$ .

**פתרון:** נסמן  $b_n = \log_5 a_n$ . זוהי סדרה חשבונית שמקיימת  $b_1 = 3$  ו-  $d = -\frac{1}{2}$ .

מתקיים  $b_7 = b_1 + 6 \cdot d = 3 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 3 = 0$  לכן  $\log_5 a_7 = 0$  כלומר,  $a_7 = 1$ .