מבחן סיווג במתמטיקה 4.11.2015

מס' סטודנט: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ פקולטה: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0.
סכום נקודות אפשרי ־ 100. ציון עובר 55.

ניקוד

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
שאלה 20	
סה"כ	

שאלה מס' 1 (5 נקודות)

נתון ש־$\log_a(e^2) = 3$. מהו a?

$a = \boxed{\sqrt[3]{e^2} = e^{2/3}}$

שאלה מס' 2 (5 נקודות)

מצאו זווית β ש־$\sin\beta + \cos\beta = \sqrt{2}$ ו־$60 < \beta < 65$ (כאן β מחושבת ברדיאנים).

פתרון: $\beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, כאשר k הוא מספר שלם כלשהו. מכיוון ש־2π הוא בערך 6.28, אם ניקח $k = 10$ הבחירה $\beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi \times 10$ תקיים את אי השוויונים.

$\beta = \boxed{\frac{\pi}{4} + 2\pi \times 10}$

שאלה מס' 3 (5 נקודות)

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(2) = 5f'(3) = 10$ (הפונקציה צריכה להיות נתונה על ידי נוסחה אחת).

פתרון: ננחש פונקציה שהיא פולינום ־ כך יהיו לנו פרמטרים שנוכל לשחק אתם. יש לנו שני נתונים, ולכן נבחר פולינום עם שני מקדמים: $f(x) = ax^2 + bx$ (אין טעם להוסיף איבר חופשי, כי הוא ייעלם בגזירה). אזי $f'(x) = 2ax + b$, והצבה תיתן לנו צמד משוואות: $f'(2) = 4a + b = 10, \quad 5f'(3) = 5(6a + b) = 10$, והפתרון למערכת המשוואות הזו הוא $a == 4, \ b = 26$.

$f(x) = \boxed{-4x^2 + 26x}$

שאלה מס' 4 (5 נקודות)

מהו המרחק של הנקודה $(3, 4, 5)$ מן הראשית?

$distance = \boxed{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}}$

שאלה מס' 5 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \cos x \sin x$ ו־$f(\pi) = 1$.

פתרון: $f(x) = \int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ **נציב** $f(\pi) = 1$ **ונקבל** $c = 1$**. בדקו ע"י גזירת הפונקציה.**

משתמשים בכך ש־$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x$

$$f(x) = \boxed{\frac{\sin^2 x}{2} + 1}$$

שאלה מס' 6 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} (g(x) - \sin x) = 0$, ו־$(g(x) - \sin x)x > 0$ לכל x (נדרש שהפונקציה $g(x)$ תהיה מוגדרת לכל $x > 0$).

$$g(x) = \boxed{\sin x + \frac{1}{x}}$$

שאלה מס' 7 (5 נקודות)

חשבו את הנגזרת של הפונקציה $g(x) = 2^{(x^2)}$.

$$g'(x) = \boxed{2^{(x^2)} 2x \ln 2}$$

(רמז: באחד השלבים כדאי להשתמש בעובדה ש־$2 = e^{\ln 2}$.)

שאלה מס' 8 (5 נקודות)

חשבו את הגבול

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + h) - \sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{h}} = \boxed{0}$$

פתרון: נכפול מונה ומכנה ב־$\sqrt{h}$ **ונקבל:**

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{4} + h) - \sin(\frac{\pi}{4})}{h} \right] \sqrt{h}$$

הביטוי בסוגריים המרובעים הוא נגזרת של סינוס בנקודה $\pi/4$ **- זהו מספר (יוצא** $\sqrt{2}$ **אבל לא באמת משנה מהו המספר הזה), ואילו** $\sqrt{h}$ **שואף ל־**0 **כאשר** $h \to 0$**, לכן הכל שואף ל־**0**.**

שאלה מס' 9 (5 נקודות)

מצאו פולינום $p(x)$ שקבוצת הנקודות x המקיימות $p(x) \geq 2$ היא $[1,2] \cup [-2,-1]$ (כאן $A \cup B$ מציין איחוד של A ו־B).

$p(x) =$ $-(x+1(x+2)(x-1)(x-2)+2 = -(x^2-1)(x^2-4)+2 = -x^4+5x^2-2$

פתרון: $(x-2)(x-1)(x+2)(x+1)-$. מתאפס בנקודות 1־,2־,1,2 וגדול מאפס בקטעים הנדרשים. כעת יש לבצע תיקון על מנת שיתקיים $p(x) \geq 2$. ברור שמבחינת חילופי הסימנים זה עובד, השאלה היא מהו הסימן לפני המכפלה. ציירו את גרף הפונקציה, היווכחו שאם מדובר במכפלה מן הסוג הזה, הפנוקציה שואפת למינוס אינסוף כאשר $x \to \infty$, ולכן נחוץ סימן המינוס לפני המכפלה.

שאלה מס' 10 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$ ו־ $\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x) = \infty$.

$f(x) =$ $\ln x + 3x$

שאלה מס' 11 (5 נקודות)

מצאו וקטור (a,b) ניצב לוקטור $(1,2)$, ארוך ממנו פי 2, ומצביע בכיוון הרביע הרביעי.

$a =$ 4 $b =$ -2

.

פתרון: הוקטור $(-2b,b)$ מאונך לוקטור הנתון. למה? כעת נדרש שיתקיים $\sqrt{(-2b)^2+b^2} = 2\sqrt{1^2+2^2}$. ולכן $b=2$ או $b=-2$. לבסוף נדרוש שיהיה ברביע הרביעי ולכן הרכיב הראשון חיובי והרכיב השני שלילי.

שאלה מס' 12 (5 נקודות)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln 2^x}{\ln x} =$$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \ln 2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln\ln 2}{\ln x} = 1$

פתרון: משתמשים בחוקים הבאים: $\ln ab = \ln a + \ln b$. $\ln a^x = x \ln a$. כאשר $x \to \infty$, הביטוי $\frac{\ln\ln 2}{\ln x} \to 0$

שאלה מס' 13 (5 נקודות)

מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר N שלכל $n > N$ מתקיים

$$\sqrt[4]{2^n} > n$$

$$N = \boxed{16}$$

שאלה מס' 14 (5 נקודות)

מהו המקדם a_8 של x^8 בפיתוח $(1 + x + x^4)^3$?

$$a_8 = \boxed{3}$$

.

פתרון: פתיחת הסוגריים (אפשר בעזרת נוסחאת הבינום)

שאלה מס' 15

מצאו שלושה מספרים x, y, z ש־$x + 2y + 3z = 12$, $x + 2y - 5z = 20$, $x - 2y - 5z = 4$

$$x = \boxed{7} \quad y = \boxed{4} \quad z = \boxed{-1}$$

פתרון: מערכת משוואות

שאלה מס' 16 (5 נקודות)

מהו ערכו הגדול ביותר של a שעבורו קבוצת המספרים המקיימת את אי השוויון $|x + 2| + |x - 3| < a$ היא ריקה?

$$a = \boxed{5}$$

.

פתרון: נשים לב שלכל $-2 \le x \le 3$ **מתקיים** $|x + 2| + |x - 3| = 5$ **אם** x **מחוץ לקטע זה** $|x + 2| + |x - 3| > 5$**. שרטוט יכול לעזור.**

פתרון נוסף בעזרת אי שיוויון המשולש: $|x+2|+|x-3| = |x+2|+|-x+3| \ge |(x+2)+(-x+3)| = 5$

שאלה מס' 17 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $\frac{\ln(x^2)}{x}$.

פתרון: $f(x) = \int \frac{\ln(x^2)}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = 2\int \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \ln^2 x$ **בדקו ע"י גזירת הפונקציה.**

משתמשים בכלל: $\ln a^x = x \ln a$ **בכך ש־** $\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \boxed{\ln^2 x}$$

.

שאלה מס' 18 (5 נקודות)

כתבו נוסחה סגורה לסדרה a_n ש־$a_n - a_{n-1} = 3^{n}$ לכל n ו־$a_1 = 10$.

$$a_n = \boxed{10 + \frac{3^2(3^{n-1}-1)}{2} = \frac{11+3^{n+1}}{2}}$$

פתרון: סדרת ההפרשים היא סדרה הנדסית שבה $q = 3$ ושאיברה הראשון הוא 3^2 ולכן סכומה $S_{n-1} = \frac{3^2(3^{n-1}-1)}{3-1}$ **ולכן** $a_n = a_1 + S_{n-1}$

שאלה מס' 19 (5 נקודות)

מצאו פתרון ממשי למשוואה $e^{2z} + 2e^z - 1 = 0$.

פתרון: נסמן $t = e^z$, נקבל משוואה ריבועית $t^2 + 2t - 1 = 0$. הפתרון המשוואה הוא $t_1 = -1 - \sqrt(2)$, או $t_2 = -1 + \sqrt(2)$. כיוון ש־e^z היא פונקציה חיובית לכל z אזי $e^z = -1 + \sqrt{2}$ כלומר $z = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

$$z = \boxed{\ln(\sqrt{2} - 1)}$$

שאלה מס' 20 (5 נקודות)

חשבו את השטח בין הקוים $y = x^2$ ו־$y = x$ בתחום $0 \leq x \leq 1$.

$$area = \boxed{\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}}$$