

מבחן סיווג במתמטיקה 5.6.2020 - פתרון

שאלה מס' 1

מצאו את כל המספרים הממשיים a שעבורם $\log_6 a + \log_a 6 > 2$.

פתרון: קודם כל, נשים לב, ש- $a > 0$ ו- $a \neq 1$. מתקיים $\log_a 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 a} = \frac{1}{\log_6 a}$. נסמן $t = \log_6 a$. צריך לפתור את המשוואה $t + \frac{1}{t} > 2$. נפריד לשני מקרים. אם $t > 0$ אז נקבל את המשוואה $t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 > 0$, כלומר $t > 1$ ו- $t \neq 1$, כלומר $t \in (1, \infty) \cup (0, 1)$. אם $t < 0$ אז נקבל $t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 < 0$ ולא קיים t שמקיים את אי השוויון. לכן התשובה הסופית היא $(1, \infty) \cup (0, 1)$.

שאלה מס' 2

חשבו את $(i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2020})^{31}$, כאשר i הוא המספר המקיים $i^2 = -1$.

פתרון: נפשט את הביטוי שבסוגריים. זוהי סדרה הנדסית.

$$i + i^2 + \dots + i^{2020} = \frac{i(1 - i^{2020})}{1 - i} = \frac{i(1 - 1)}{1 - i} = 0$$

ולכן $0^{31} = 0$

שאלה מס' 3

נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(0) = 0$ ו- $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. חשבו את $f(\ln 2)$.

פתרון: מתקיים:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1 + e^x}{e^x + 1} dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = x - \ln(e^x + 1) + C$$

$$f(0) = 0 - \ln 2 + C \Rightarrow C = \ln 2$$

לכן

$$f(\ln 2) = \ln 2 - \ln(e^{\ln 2} + 1) + \ln 2 = 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

שאלה מס' 4

חשבו את $\cos(2 \arccos(\frac{2}{5}))$.

פתרון:

$$\cos\left(2 \arccos\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 2 \cos^2\left(\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{25} - 1 = -\frac{17}{25}$$

שאלה מס' 5

נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 7$. בדיוק אחת מהטענות הבאות נכונה. איזו מהן?

פתרון: נחקור את הפונקציה.

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x + 2 = 0 \iff 2(e^x - 1)^2 \geq 0$$

ולכן הטענה הנכונה היא: $f(x)$ מונוטונית עולה לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה מס' 6

יהא l ישר העובר בראשית ומאונך למישור $\pi: 2x + by + cz + d = 0$. תהא $P(-1, -1, 2)$ נקודת החיתוך של הישר l והמישור π . חשבו את d .

פתרון: הישר l עובר בראשית הצירים $A(0, 0, 0)$ ונקודה $P(-1, -1, 2)$ ולכן וקטור הכיוון של הישר הוא $\vec{AP} = (-1, -1, 2)$. כיוון שהישר l מאונך למישור π הוקטור $\vec{AP}$ מקביל לנורמל של המישור $\vec{N} = (2, b, c)$ כלומר

$$\vec{N} = (2, b, c) = \alpha(-1, -1, 2) = (-\alpha, -\alpha, 2\alpha) \Rightarrow \alpha = -2, b = 2, c = -4$$

לכן משוואת המישור היא $2x + 2y - 4z + d = 0$. נציב את הנקודה ונקבל $0 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + d$ ונקבל ש- $d = 12$.

שאלה מס' 7

נתון אי השוויון הבא: $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$. מצאו את ההפרש בין המספר המינימלי והמקסימלי שמקיימים את אי השוויון.

פתרון: נפריד למקרים לפי התחומים הבאים: $x \geq 1, -2 \leq x \leq 1, x \leq -2$. אם $x \geq 1$ אז

$$2x + 4 + x - 1 = 3x + 3 \leq 12 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

אם $-2 \leq x \leq 1$ אז

$$2x + 4 - x + 1 = x + 5 \leq 12 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$$

אם $x \leq -2$ אז

$$-2x - 4 - x + 1 - 3x + 3 \leq 12 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow -5 \leq x \leq -2$$

לכן המספר המינימלי שמקיים את אי השוויון הוא -5 והמקסימלי הוא 3 והמרחק ביניהם הוא 8 .

שאלה מס' 8

הפולינום $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 3x + 2$ מתחלק ללא שארית ב- $g(x) = x^2 - 1$. מצאו את ab .

פתרון: אפשרות א: לבצע חלוקת פולינומים ולהשוות את השארית ל-0.
אפשרות ב: אם $g(x) = x^2 - 1 \mid p(x)$ אז $1, -1$ הם שורשים של הפולינום $p(x)$. נציב ונשווה ל-0:

$$p(1) = 1 + a + b - 3 + 2 = a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$p(-1) = 1 - a + b + 3 + 2 = 6 - a - a = 0 \Rightarrow a = 3, b = -3 \Rightarrow ab = -9$$

שאלה מס' 9

מצאו אורך הקטע המקסימלי המוכל בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ כך שמתקיים $\cos^2 x - 3 \sin x + \frac{3}{4} > 0$ לכל x בקטע.

פתרון: מתקיים

$$\cos^2 x - 3 \sin x + \frac{3}{4} = (1 - \sin^2 x) - 3 \sin x + \frac{3}{4} = -\sin^2 x - 3 \sin x + \frac{7}{4} > 0$$

נסמן $t = \sin x$ ונפתור את המשוואה $t^2 + 3t - \frac{7}{4} = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{2} = \frac{-3 \pm 4}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad -\frac{7}{2}$$

לכן מתקיים $t^2 + 3t - \frac{7}{4} < 0$ אם $-\frac{7}{2} < t < \frac{1}{2}$.
כיוון ש- $|\sin x| \leq 1$ מתקיים ש- $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{1}{2}$.
כיוון שהתחום מוגבל לקטע $(0, \frac{\pi}{2})$, לכן אוסף כל הנקודות שמקיימות את אי השוויון הוא $(0, \frac{\pi}{6})$ ואורכו $\frac{\pi}{6}$.

שאלה מס' 10

המשיק לגרף הפונקציה $y = 2x^4$ בנקודה $x = a$ מאונך למשיק לאותו הגרף בנקודה $x = 1$. מצאו את a .

פתרון: שיפוע המשיק בנקודה $x = 1$ הוא $f'(1) = 8 \cdot 1^3 = 8$. לכן שיפוע המשיק בנקודה $x = a$ הוא $-\frac{1}{8}$.
לכן $f'(a) = 8a^3 = -\frac{1}{8}$ לכן $a^3 = -\frac{1}{64}$, כלומר $a = -\frac{1}{4}$.

שאלה מס' 11

תהא $z_n = a_n + ib_n$ סדרה של מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה. נתון ש- $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 2$. תהא w_n סדרה המוגדרת ע"י $w_n = z_n + \frac{1}{z_n}$. חשבו את סכום עשרת האיברים הראשונים של w_n .

פתרון: מתקיים $w_n = z_n + \frac{1}{z_n} = z_n + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|^2} = z_n + \bar{z}_n = 2a_i$ לכן
 $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{10} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = 2 \cdot 2 = 4$

שאלה מס' 12

תהא $f(x) = \sqrt[3]{x}$. נסמן ב- $g(x)$ פונקציה שמקיימת $(g \circ f)(x) = 2x + 3$. חשבו $g'(2)$.

פתרון א': על פי כלל השרשרת מתקיים: $f'(x) \cdot (g \circ f)'(x) = g'(f(x))$. מתקיים $f(8) = 2$ לכן

$$g'(f(8)) f'(8) = g'(2) f'(8) = g'(2) \cdot \frac{1}{3} (8)^{-2/3} = \frac{1}{12} g'(2) = 2 \Rightarrow g'(2) = 24$$

פתרון ב': מתקיים $(g \circ f)(x) = g(\sqrt[3]{x}) = 2x + 3$ לכן $g(x) = 2x^3 + 3$ ומתקיים $g'(x) = 8x^2$. כלומר $g'(2) = 8 \cdot 2^2 = 24$.

שאלה מס' 13

יהיו $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ וקטורים נתונים כך שמתקיים $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 2$. נתון שהוקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$ ניצבים ושהזווית בין הוקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ והזווית בין הוקטורים $\vec{v}, \vec{u}$ היא $\frac{\pi}{3}$. יהא: $\vec{v}_1 = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \vec{w}$. נתון ש- $\vec{v}_1$ ניצב לוקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$. חשבו את $\alpha + \beta$.

פתרון: על פי הנתון $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$,

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 2$$

בנוסף, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v} = 0$ וגם $\vec{v}_1 \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{w} = (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{w} + \beta \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = 0 + 2\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v} = (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v} = 2\alpha + 4\beta + 2 = 2\alpha - 8 + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha + \beta = 3 + (-2) = 1 \text{ לכן}$$

שאלה מס' 14

חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)$

פתרון א': נפשט את הפונקציה:

$$\frac{1}{\sin x} - \cot(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \text{ לכן}$$

פתרון ב': נפשט את הפונקציה

$$\frac{1}{\sin x} - \cot(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0 \text{ לכן}$$

שאלה מס' 15

נתון פולינום ממעלה רביעית עם מקדמים ממשיים מהצורה:

$$p(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ כך ששורשיו הם:}$$

$$1 + i\sqrt{2}, \quad 1 - i\sqrt{2}, \quad 1 + i\sqrt{3}, \quad 1 - i\sqrt{3} \text{ חשבו את } a_3 + a_0.$$

פתרון: נשתמש בוויטה:

$$(1 + i\sqrt{2}) + (1 - i\sqrt{2}) + (1 + i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3}) = 4 = -\frac{a_3}{1} \Rightarrow a_3 = -4$$

$$(1 + i\sqrt{2}) \cdot (1 - i\sqrt{2}) \cdot (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3}) = (1 + 2) \cdot (1 + 3) = 12$$

$$a_3 + a_0 = -4 + 12 = 8 \text{ לכן}$$

שאלה מס' 16

תהא a_n סדרה הנדסית שבה $a_1 = 8$ ו- $q = 2$. נגדיר סדרה $b_n = \log_2 a_n$. מצאו את סכום 100 האיברים הראשונים של הסדרה b_n .

פתרון: מתקיים $a_n = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$ לכן $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n+2} = n+2$.
כלומר, b_n סדרה חשבונית בה $b_1 = 3$ ו- $d = 1$. האיבר האחרון בסדרה הוא 102, לכן $\frac{(3+102) \cdot 100}{2} = 5250$.

שאלה מס' 17

מצאו את סכום הפתרונות של המשוואה $1 + x + x^2 + \dots + x^{11} = x + 3 + \frac{x^{12}}{x-1}$

פתרון: $1 + x + x^2 + \dots + x^{11} = x + 3 + \frac{x^{12}}{x-1}$ נכפול ב- $x-1$ ונקבל
 $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{11}) = (x+3)(x-1) + x^{12} \Rightarrow x^{12} - 1 = x^2 + 3x - x - 3 + x^{12}$
לכן מחפשים את סכום הפתרונות של המשוואה $x^2 + 2x - 2 = 0$ ועל פי וייטה $x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2$
א. -2
ב. -1
ג. 0
ד. 1
ה. 2

שאלה מס' 18

מצאו את האיבר החופשי מ- x בפיתוח הביטוי: $(x^3 - \frac{3}{x^2})^{15}$.

פתרון: על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים

$$\left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{3k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} (-3)^{15-k} x^{3k-30+2k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} (-3)^{15-k} x^{5k-30}$$

מחפשים מקדם של x^0 כלומר $k = 6$. במקרה זה המקדם הוא $\binom{15}{6} (-3)^9$.

שאלה מס' 19

נתונה הפונקציה $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ המוגדרת על ידי $f(x) = e^x - x^2$. חשבו: $(f^{-1})'(1)$.

פתרון: מתקיים $f(0) = 1$ ולכן $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 - 2 \cdot 0} = 1$

שאלה מס' 20

נתונה פונקציה $f(x)$ שמקיימת $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ ונתון שלפונקציה יש מינימום מקומי בנקודה x_0 כך ש- $f(x_0) = 9$. מצאו את ערכה של $f(x)$ בנקודת המקסימום המקומי שלה.

פתרון: נקודות קיצון מקומי של $f(x)$ הן נקודות בהן $f'(x) = 0$. נמצא את הפרונות:

$$6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2) = 0$$

לכן נקודות הקיצון הן 1, 2. נבדוק את סוג נקודות הקיצון על פי מבחן הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = 12x - 18 \Rightarrow f''(1) = -6, \quad f''(2) = 6$$

לכן $x = 1$ היא נקודת מקסימום ו- $x = 2$ היא נקודת מינימום, לכן $f(2) = 9$. מתקיים

$$f(x) = \int (6x^2 - 18x + 12) dx = 2x^3 - 9x^2 + 12x + C$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + C = 4 + C = 9 \Rightarrow C = 5$$

$$\text{לכן } f(1) = 2 - 9 + 12 + 5 = 10 \text{ ומתקיים } f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$$