מבחן סיווג במתמטיקה 7.10.2015

מס' סטודנט: | | | | | | | | | | פקולטה: | | | | | | | | | | | | |

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0.
סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
שאלה 20	
סה"כ	

שאלה מס' 1 (5 נקודות)

נתון ש־$\ln(\log_2(\ln a)) = 0$. מהו a?

$$a = e^2$$

פתרון: מהנתון נובע ש־ $\log_2(\ln a) = 1$**, לכן** $\ln a = 2$ **וזה אומר ש־** $a = e^2$

שאלה מס' 2 (5 נקודות)

מצאו זווית β ש־$\sin\beta + \cos\beta = 0$ ו־$3 < \beta < 6$ (כאן β מחושבת ברדיאנים).

$$\beta = \frac{7\pi}{4}$$

פתרון: מהנתון נובע ש־ $sin\beta = -\cos\beta$**, כלומר** $\tan\beta = -1$ **מה שאומר** $\beta = -\frac{\pi}{4} + \pi k$**. כדי שהזווית תהיה בתחום הרצוי צריך להוסיף** $k = 2$**, כלומר** $\beta = \frac{7\pi}{4}$

שאלה מס' 3 (5 נקודות)

תנו דוגמה לפונקציה לא ליניארית שהקו הישר $x + 2y = 3$ משיק לה בנקודה $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2 - 2.5x + 2.5$$

פתרון: צריך למצוא פונקציה שהיא לא לינארית, לכן אפשר לבחור למשל, פרבולה: $f(x) = ax^2 + bx + c$**. כיוון שהפרבולה עוברת דרך הנקודה** $(1, 1)$ **נקבל** $a + b + c = 1$**. בנוסף,** $f'(1) = 2a + b = -0.5$**. זה נותן שתי משוואות עם שלשה נעלמים, כלומר אחד הפרמטרים אפשר לבחור כרצוננו. אם נבחר** $a = 1$**, נקבל את הפרבולה הרשומה למעלה.**

שאלה מס' 4 (5 נקודות)

נתון שלמערכת המשוואות $2x + 3y = a, \quad bx + 12y = 100$ בנעלמים x ו־ y יש אינסוף פתרונות. מהם a ו־b?

$$a = 25 \quad b = 8$$

פתרון: כדי שיהיה אינסוף פתרונות, המשוואות צריכות להיות פרופורציונליות. המקדם של y **במשוואה השניה גדול פי** 4 **מהמקדם במשוואה הראשונה. נדאג שהיחס יישמר גם בשאר המקדמים ונקבל את הדרוש.**

שאלה מס' 5 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \cos^2 x$ ו־$f(0) = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} + x) + 1$$

פתרון: כדי למצוא את $f(x)$ **נמצא את הפונקציה הקדומה של הנגזרת בעזרת אינטגרציה.**

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} + x) + C$$

לאחר הצבת $f(0) = 1$ **נקבל ש־** $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} + x) + 1$

שאלה מס' 6 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} xg(x) = 0$, והיא מחליפה סימן אינסוף פעמים.

$$g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

פתרון: ידוע שפונקצית הסינוס מחליפה סימן אינסוף פעמיים כאשר $x \to \infty$, לכן נרצה לשלב את פונקצית הסינוס בפונקציה הדרושה. מצד שני, נרצה שכאשר כופלים את הפונקציה ב־x, מקבלים פונקציה ששואפת ל־0, לכן נחלק את הסינוס ב־ x ונקבל את הדרוש.

שאלה מס' 7 (5 נקודות)

חשבו: $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{10} - 1024}{h}$.

$$limit = 5120$$

רמז: אחת הדרכים היא להשתמש בהגדרת הנגזרת.

פתרון:

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה a מוגדרת כ:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(זהו קצב השינוי של הפונקציה ־ היחס בין השינוי בפונקציה לשינוי במשתנה).

הציבו בנוסחה הזאת $a = 2$, $f(x) = x^{10}$. כיוון ש־ $2^{10} = 1024$ הגבול בשאלה הוא בעצם הגדרת הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^{10}$ בנקודה $x = 2$, לכן $f'(2) = 10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120$.

דרך אחרת הי שימוש בחוק לופיטל ־ מגיעים בדיוק לאותו דבר.

שאלה מס' 8 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ לא זהותית 0 ש־$f'(x) = 2f(x)$. (אפשרות אחת היא ניחוש. אפשרות שנייה היא לשים לב שהמנה $\frac{f'(x)}{f(x)}$ היא נגזרת של פונקציה שקל לזהותה).

$$f(x) = e^{2x}$$

פתרון: פונקציה ידוע שהנגזרת שלה לא משתנה היא e^x. כאן יוצא קבוע בנגזרת ולכן יש פונקציה מורכבת שהנגזרת של הפונקציה הפנימית היא 2.

דרך נוספת: אם נעביר את האגפים במשוואה, נקבל: $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2$. נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל ש־$\ln(f(x)) = 2x$, כלומר $f(x) = e^{2x}$.

שאלה מס' 9 (5 נקודות)

מצאו פונקציה רציפה $f(x)$ שקבוצת הנקודות x המקיימות $f(x) \geq 0$ היא $[0,1] \cup [2,\infty)$ (כאן $A \cup B$ מציין איחוד של A ו־B).

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$

פתרון: ניקח פולינום שקצוות הקטעים הם השורשים שלו. לאחר מכן, בודקים את תחומי החיובית של הפולינום שקיבלנו. במקרה זה הם תואמים את הדרישות של התרגיל. אחרת, היינו כופלים במינוס כדי לקבל את הדרוש.

שאלה מס' 10 (5 נקודות)

נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(0)=0, \quad f'(x)=2x+3x^2+4x^3+\ldots+10x^9$. כתבו ביטוי פשוט ל־$(1-x)f(x)$.

$$(1-x)f(x)=x^2-x^{11}$$

פתרון: מהנתון $f(x)=x^2+x^3+\cdots+x^{10}$**, כלומר זהו סכום של סדרה הנדסית עם** $a_1=x^2, q=x$ **ולכן** $f(x)=\frac{x^2(1-x^9)}{1-x}$ **ולאחר העברת אגפים מקבלים את הדרוש.**

שאלה מס' 11 (5 נקודות)

מהו סינוס הזווית θ בין הוקטורים $(1,2)$ ו־$(3,4)$?

$$\sin\theta=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

פתרון: מהגדרת מכפלה סקלרית מקבלים $\cos\theta=\frac{(3,4)\cdot(1,2)}{\sqrt{9+16}\sqrt{1+4}}=\frac{11}{5\sqrt{5}}$ **ולכן** $sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{\frac{4}{125}}$**. כיוון ששני הוקטורים נמצאים ברביע הראשון, הזווית ביניהם היא קטנה מ־**$\frac{\pi}{2}$ **ולכן הסינוס חיובי.**

שאלה מס' 12 (5 נקודות)

מצאו וקטור (a,b) שכיוונו הוא ככיוון $\vec{u}=(3,4)$, ואורכו הוא 2.

$$a=\frac{6}{5}\ b=\frac{8}{5}$$

.

פתרון: אורך הוקטור הנתון הוא $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$**, לכן כדי לקבל וקטור באורך** 2**, נכפול כל אחד מהרכיבים ב־** $\frac{2}{5}$**.**

שאלה מס' 13 (5 נקודות)

חשבו

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2\ln x}= \quad 1$$

רמז: הציבו $x=e^{10}$, למה בערך יהיה הביטוי שווה?

פתרון: כאשר מציבים $x=e^{10}$ **מקבלים** $\frac{e^{10}}{e^{10}+20}$**. רואים שבעצם הביטוי עם הלן הוא זניח לעומת** x **כאשר מציבים ערכים מאוד גדולים ולכן הפונקציה באינסוף נראית כמו** $\frac{x}{x}=1$**.**

שאלה מס' 14 (5 נקודות)

מצאו סדרה חשבונית בת 10 איברים, שאינה קבועה, וסכומה הוא 100. כתבו אותה באמצעות האיבר הראשון בה, a_1, וההפרש שלה, d.

$$a_1=1 \qquad d=2$$

.

פתרון: מהנוסחה לסכום סדרה חשבונית, נקבל $d=\frac{20-2a_1}{9}$**, לכן בוחרים** a_1 **כלשהו ומחשבים את ה־**d **המתאים.**

שאלה מס' 15

מצאו שני מספרים x, y ש־$x + 2y = 12$ ומכפלתם גדולה ככל האפשר.

$$x = 6 \; y = 3$$

.

פתרון: נבנה פונקצה המתארת את הדרוש: $x = 12 - 2y$. אנחנו מחפשים את המקסימום של הפונקציה $f(y) = y(12 - 2y) = 12y - y^2$. המקסימום מתקבל כאשר $y = 3$, כלומר $x = 6$.

שאלה מס' 16 (5 נקודות)

מצאו a ו־ b שקבוצת הפתרונות של אי השוויון $|x + 3| + |x + 2| \leq 4$ היא $\{x \mid a \leq x \leq b\}$.

$$a = -4.5 \quad b = -0.5$$

.

פתרון: נחלק לתחומים בהם נשמר הסימן של הביטויים בתוך הערכים המוחלטים. עבור $x > -2$ מתקיים $x + 2 + x + 3 \leq 4$, כלומר $x \leq 0.5$. עבור $-2 > \quad > -3$, מתקיים $-x - 2 + x + 3 \leq 4$, כלומר כל x בתחום מקיים את אי השוויון. עבור $x < -3$ מתקיים $-x - 2 - x - 3 \leq 4$, כלומר $x \geq -4.5$. אם נאחד את כל המקרים נקבל $-4.5 \leq x \leq -0.5$.

שאלה מס' 17 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $x \sin(x^2)$.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$$

.

פתרון: נשלים את המקדם של הסינוס לנגזרת של הפונקציה הפנימית ונקבל $\int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) = \frac{1}{2} \cdot (-\cos(x^2))$.

שאלה מס' 18 (5 נקודות)

מצאו שני וקטורים $\vec{u}$ ו־$\vec{v}$ במרחב שניצבים זה לזה ושניהם ניצבים גם לוקטור $(1, 2, 3)$.

$$\vec{u} = (-5, 1, 1) \quad \vec{v} = (1, 6, -11)$$

פתרון: שני וקטורים ניצבים אם ורק אם המכפלה הסקלארית ביניהן שווה ל־0. נמצא תחילה וקטור אחד המקיים זאת, כלומר מחפשים וקטור $\vec{u} = (x, y, z)$ כך ש־ $x + 2y + 3z = 0$. יש לנו שלושה נעלמים ומשוואה אחת ולכן נוכל לבחור שני פרמטרים כרצונינו וזה יקבע את הפרמטר השלישי. למשל, $\vec{u} = (-5, 1, 1)$. כעת מחפשים וקטור $\vec{v} = (a, b, c)$ כך ש־ $a + 2b + 3c = 0, -5a + b + c = 0$. גם כאן ניתן לבחור את אחד הפרמטרים מה שייקבע את שני האחרים, למשל $\vec{v} = (1, 6, -11)$.

שאלה מס' 19 (5 נקודות)

מצאו, אם יש, פתרון ממשי למשוואה $e^{2z} + 2e^z + 1 = 0$.

$$z = \emptyset$$

פתרון: אם נסמן $t = e^z$, נקבל משוואה ריבועית $t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2 = 0$. הפתרון היחיד של המשוואה הוא $t = -1$, כלומר $e^z = -1$. כיוון ש־e^z היא פונקציה חיובית לכל z אין פתרון למשוואה.

שאלה מס' 20 (5 נקודות)

מצאו מספר $x \neq 0$ שהסדרה $1, 2x, 3x$ היא סדרה גיאומטרית.

$$x = \frac{3}{4}$$

.

פתרון: בסדרה הנדסית המנה של האבר הבא בקודמו קבועה. כלומר $\frac{3}{2} = \frac{3x}{2x} = \frac{2x}{1}$, כלומר $2x = \frac{3}{2}$.