מבחן סיווג במתמטיקה 12.7.2015

מס' סטודנט: | | | | | | | | | | פקולטה: | | | | | | | | | | | | |

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0.
סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15א	
שאלה 15ב	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
סה"כ	

שאלה מס' 1 (5 נקודות)

מצאו זווית α ברביע השלישי ש־$\tan(\alpha) = \sqrt{3}$

$$\alpha = \boxed{\tfrac{4\pi}{3}}$$

שאלה מס' 2 (5 נקודות)

כתבו זוג פונקציות, $f(x)$ ו־$g(x)$ המקיימות $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ו - $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = \infty$.

$$f(x) = \boxed{x^2+5x}$$

$$g(x) = \boxed{x^2}$$

פתרון: נוח לבנות את הדוגמה הדרושה בעזרת שני פולינומים. הגבול של המנה יהיה 1, אם המקדמים המובילים של שני הפולינומים שווים. כדי שהגבול של ההפרש לא יהיה אפס, נרצה שהמקדמים החופשיים יהיו שונים. שאר המקדמים אמורים להיות שווים.

שאלה מס' 3 (5 נקודות)

פונקציה f מן המספרים הטבעיים לעצמם מקיימת $f(n+1) = f(n) + n, \quad f(0) = 0$. מהו $f(100)$?
למי שקל לו יותר: סדרה a_n מקיימת $a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 0$, מהו a_{100}? (האם אתם יודעים שסדרות הן בעצם פונקציות?)

$$f(100) = \boxed{4950}$$

פתרון: כדי להבין משהו, כדאי תמיד לעשות דוגמאות פשוטות. במקרה זה, חישוב האיברים הראשונים בסדרה:

$$f(1) = f(0)+0 = 0,\ f(2) = f(1)+1 = 1,\ f(3) = f(2)+2 = 1+2,\ f(4) = f(3)+3 = 1+2+3, \ldots$$

מזה מבינים ש־ $f(n) = 1+2+\cdots+n-1$. כלומר זהו סכום של סדרה חשבונית. במיוחד, $f(100) = 1+2+\cdots+99 = \frac{100\cdot 99}{2} = 4950$

שאלה מס' 4 (5 נקודות)

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(0) = 1,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 4$.

$$f(x) = \boxed{2x^2+2x+1}$$

פתרון: כדאי לנסות פולינום. מכיוון שיש שלושה נתונים, כדאי לקחת פונלינום ממעלה שנייה, שיש לו שלושה מקדמים: ax^2+bx+c. התנאי $f(0) = 1$ אומר ש־$c = 1$ (מדוע?)
גזירה והצבה ב־0 נותנת ש־$b = 2$, וגזירה נוספת והצבה ב־0 נותנת את a - בצעו את השלב הזה.

שאלה מס' 5 (5 נקודות)

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שהיא רציפה בכל מקום, גזירה בכל מקום פרט ל־$x=3$, הנגזרת בכל נקודה $x>3$ היא -2 והנגזרת בכל נקודה $x<3$ היא 2.

)

$$f(x) = \boxed{-2|x-3|}$$

פתרון: פונקציה ידועה שהיא רציפה בכל מקום אבל לא גזירה בנקודה אחת היא $|x|$. הרעיון של התרגיל הוא לשנות את הפונקציה כדי שתתאים לנתוני השאלה. קודם כל, כדי שנקודת אי הגזירות תהיה 3 ולא 0, נשנה את הפונקציה ל־ $|x-3|$. כעת, הנגזרת לכל $x>3$ היא 1 והנגזרת בכל נקודה $x<3$ היא -1. ולכן, כדי לקבל את הדרוש, נשאר לכפול את הפונקציה שקיבלנו ב־ -2.

שאלה מס' 6 (5 נקודות)

מצאו פונקציה רציפה וגזירה פעמיים שתחום הקמירות שלה (התחום שבו $f''(x)\geq 0$) הוא בדיוק הקבוצה $[1,3]$.

$$f(x) = \boxed{-\frac{x^4}{12}+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}}$$

פתרון: $f''(x)$ צריכה להיות פונקציה שהיא אי שלילית בדיוק בקטע $[1,3]$, למשל $f''(x)=-(x-1)(x-3)=-x^2+4x-3$. מה שנותר זה לבצע אינטגרציה פעמיים ולקבל את הדרוש.

שאלה מס' 7 (5 נקודות)

חשבו

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \boxed{\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C}$$

פתרון: זוהי פונקציה רציונלית בה המעלה של המונה גדולה יותר מהמעלה של המכנה. מתקיים $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$. אפשר להגיע לתוצאה זו גם על ידי חלוקת פולינומים. מכאן, האינטגרציה היא של פונקציות בסיסיות.

שאלה מס' 8 (5 נקודות)

חשבו

$$\int_0^5 \frac{x^2}{x^3+2}dx = \boxed{\frac{1}{3}\ln(\frac{127}{2})}$$

פתרון: נבצע השלמה לנגזרת

$$\int_0^5 \frac{x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int_0^5 \frac{3x^2}{x^3+2}dx = (\frac{1}{3}\ln|x^3+2|)\Big|_0^5 = \frac{1}{3}(\ln(127)-\ln(2))$$

שאלה מס' 9 (5 נקודות)

ידוע כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (כאשר x מחושב ברדיאנים). חשבו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

פתרון: $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$ **ולכן**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

שאלה מס' 10 (5 נקודות)

חשבו את $\tan(19.25\pi)$, כשהזווית נתונה ברדיאנים.

$$\tan(19.25\pi)=\boxed{1}$$

פתרון: כיוון שהמחזור של טנגנס הוא π, מתקיים $\tan(19.25\pi)=\tan(0.25\pi)=1$.

שאלה מס' 11 (5 נקודות)

מצאו וקטור באורך 3 ברביע השני שזוויתו עם ציר y היא 30°.

$$(a,b)=\boxed{(-\tfrac{3}{2},\tfrac{3\sqrt{3}}{2})}$$

פתרון: ציירו את הוקטור הנתון בשאלה, וחשבו את אורכי שני הניצבים של המשולש הנוצר עם ציר y (או עם ציר x) בעזרת הפונקציות הטריגונומטריות. שימו לב, לסימנים של הרביע השני.

שאלה מס' 12 (5 נקודות)

חשבו $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{|1-2x^2|}=\boxed{\tfrac{1}{2}}$

פתרון: הביטוי שבתוך הערך המוחלט שלילי עבור ערכים חיוביים גדולים. ולכן המכנה הוא מהצורה $2x^2-1$, וכיוון שהמעלות של המונה והמכנה שוות, אז הגבול באינסוף הוא מנת המקדמים המובילים.

שאלה מס' 13 (5 נקודות)

חשבו $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\boxed{1}$

פתרון: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$

שאלה מס' 14 (5 נקודות)

חשבו

$$\frac{log_{\sqrt{1000}}e}{log_{10}e} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

פתרון: נעביר את המונה ואת המכנה לבסיס e ונקבל:

$$\frac{log_{\sqrt{1000}}e}{log_{10}e} = \frac{\frac{\ln e}{\ln\sqrt{1000}}}{\frac{\ln e}{\ln 10}} = \frac{\ln 10}{\ln(10)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$$

שאלה מס' 15

א. (5 נקודות) תהא $f(x) = e^{2x+3}$. אזי הפונקציה ההפוכה לה היא

$$g(x) = \boxed{\frac{\ln x - 3}{2}}$$

.

פתרון: אם $y = e^{2x+3}$ אז $\ln y = 2x + 3$, כלומר $x = \frac{\ln y - 3}{2}$. מכיוון שנהוג לכתוב פונקציות כשהמשתנה הוא x, כדי לקבל את הפונקציה ההפוכה מחליפים את התפקידים של x ו־y בביטוי שקיבלנו.

דוגמה פשוטה יותר: $(x \geq 0)\quad f(x) = x^2$. אם $y = x^2$ אז $\sqrt{y} = x$, כלומר הפונקציה ההפוכה לריבוע היא שורש. מכיוון שנהוג לכתוב את הפונקציה עם משתנה x ולא y, הפונקציה ההפוכה היא $g(x) = \sqrt{x}$.

ב. (5 נקודות) תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא:

$$\boxed{(0, \infty)}$$

.

פתרון: תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה הוא התמונה של הפונקציה המקורית.

שאלה מס' 16 (5 נקודות)

מהו המקדם של x^4 כשפותחים את הסוגריים ב־$(2 + x^2)^3$?

$$\boxed{6}$$

.

פתרון: נפתח את הסוגריים לפי הנוסחה של הבינום של ניוטון ובעזרתו של משולש פסקל ונקבל

$$(2 + x^2)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^4 + x^6$$

שאלה מס' 17 (5 נקודות)

כתבו שלושה וקטורים שונים מ־$\vec{0}$ במישור, שהם שווי אורך וסכומם הוא $\vec{0}$.

$$(a,b) = \boxed{(1,0)}$$

$$(c,d) = \boxed{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$(e,f) = \boxed{(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2})}$$

פתרון: כדי לקבל שלושה וקטורים בעלי אותו אורך שסכומם הוא וקטור האפס, ניקח את מעגל היחידה ונחלק לשלושה חלקים שווים, כלומר ניקח את הוקטור $(1,0)$ ונוסיף כל פעם 120 מעלות

שאלה מס' 18 (5 נקודות)

בסדרה גיאומטרית בת 5 איברים האיבר הראשון הוא 12 והאיבר החמישי הוא 48. מהו האיבר השלישי?

$$\boxed{24}$$

פתרון: $48 = a_4 = 12q^4$**, כלומר** $q = \sqrt{2}$ **ולכן** $a_3 = 12q^2 = 23$**.**

שאלה מס' 19 (5 נקודות)

חשבו

$$\lim_{x\to 0} \log_{10}|x| = \boxed{-\infty}$$