הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל   הפקולטה למתמטיקה

<u>מבחן סיווג במתמטיקה 14.03.19</u>

משך המבחן: שלוש שעות.

ללא חומר עזר

במבחן 20 שאלות. משקל כל שאלה 5 נקודות.

יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס התשובות.

תשובות שיסומנו על טופס המבחן לא ייבדקו.

בהצלחה!

שאלה מספר 1:

הפונקציה $f(x)=4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+1$ היא

פתרון:

f זוגית כי:

$$f(-x)=4\left(\sin\frac{\pi(-x)}{2}\right)^2+1=4\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+1=4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+1=f(x)$$

נבדוק מחזוריות:

$$4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+1=f(x)=f(x+T)=4\left(\sin\frac{\pi(x+T)}{2}\right)^2+1$$

$$=4\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi T}{2}\right)\right)^2+1$$

כלומר, $\frac{\pi T}{2}=\pi$ ולכן, $f(x)$ היא מחזורית עם מחזור $T=2$

שאלה מספר 2:

נתון $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ הביטוי $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$ שווה:

$$\frac{1}{4}=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \qquad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$$

$$\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$$

שאלה מספר 3:

נסמן $f(x) \ll g(x)$ אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ בדיוק אחת מן הטענות הבאות נכונה. מהי?

א. $x \ll x^2 \ll x^2 \ln x \ll e^{x \ln x}$

ב. $\sqrt{x} \ll \ln x \ll \ln(\ln x) \ll e^{x \ln x}$

ג. $x \ll (\ln x)^{100} \ll \ln^{200}(\ln x) \ll e^{x^2}$

ד. $e^{x^2} \ll e^{x \ln x} \ll e^{(\ln x)^2}$

ה. $e^x \ll x^{100} \ll \ln^{100}(\ln x)$

שאלה מספר 4:

משוואת המישור העובר בנקודות $\mathrm{M}_2\colon (2,3,0)$; $\mathrm{M}_1\colon (3,5,1)$ ומקביל לווקטור $\bar{v} = (7,11,5)$ היא:

הנורמל למישור מאונך ל- v וגם לוקטור M_1M_2 ולכן:

$(A,B,C)\cdot(7,11,5)=0 \Longrightarrow 7A+11B+5C=0$

$(A,B,C)\cdot(-1,-2,-1)=0 \Longrightarrow A+2B+C=0$

$3B=-2C$ וגם $3A=C \Longrightarrow C=3;\ A=1;\ B=-2$

$N=(1,-2,3) \Longrightarrow N\cdot M_2+D=0 \Longrightarrow D=4$

לכן משוואת המישור היא $x - 2y + 3z = -4$

שאלה מספר 5:

נתון הפולינום $p(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z$ אזי:

$$p(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z = z(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z\frac{z^6 - 1}{z - 1}$$

כמובן, $z \neq 1$ לכן -1 הוא שורש וכל שאר השורשים הם מרוכבים ולפי נוסחת דה מואבר נקבל שסכום השורשים הלא ממשיים הוא אפס.

שאלה מספר 6:

תהא a_n סדרה חשבונית כך ש- $a_1=2; \quad a_{100}=299$.

הסכום $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{99}^2-a_{100}^2$ שווה:

$299=a_{100}=a_1+99d \quad \Longrightarrow \quad d=3$

$$s_{100}=(a_1+a_{100})\frac{100}{2}=301\cdot 50=15050$$

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{99}^2-a_{100}^2=(a_1-a_2)(a_1+a_2)+\ldots(a_{99}-a_{100})(a_{99}+a_{100})=$$
$$=-d\cdot S_{100}=-3\cdot 15050=-45150$$

שאלה מספר 7:

יהא $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ פולינום שמקדמיו מהווים סדרה חשבונית, כאשר $a_2\neq 0$.

נתון שאחד משורשיו הוא -1. השורש השני הוא:

פתרון:

הסדרה החשבונית היא: $a_0,\ a_1=a_0+d,\ a_2=a_0+2d$

נתון $p(-1)=0$ ולכן, $0=a_2-a_1+a_0=(a_0+2d)-(a_0+d)+a_0+d=2a_0+2d$ כלומר, $d=-a_0$

לפי נוסחאות וויטה $x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_2}$ וגם $x_1\cdot x_2=\frac{a_0}{a_2}$

לכן, $-1+x_2=-\frac{0}{-a_0}=0$ כלומר $x_2=1$

שאלה מספר 8:

יהיו z_1,z_2 מספרים מרוכבים המקיימים $|z_1|=|z_2|=2$ וגם $\arg(z_1)+\arg(z_2)=\frac{\pi}{2}$

אזי מכפלתם שווה:

פתרון:

מתקיים: $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)=\frac{\pi}{2}$

וגם $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=2\cdot 2=4$ ולכן $z_1\cdot z_2=4i$

שאלה מספר 9:

נגדיר a=1.0027+0.000027+0.00000027+... אזי $1100a$ שווה:

פתרון: סכום סדרה הנדסית אינסופית

$$a = 1 + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^4}\frac{1}{100} + \frac{27}{10^4}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{\frac{27}{10^4}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{\frac{27}{10^4}}{\frac{99}{100}} = 1 + \frac{27 \cdot 100}{10^4 \cdot 99} = 1 + \frac{3}{1100} = \frac{1103}{1100}$$

לכן $1100a$=1103

שאלה מספר 10:

ההפרש בין הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = \left|\sin x - \frac{3}{4}\right|$ הוא:

פתרון: מתקיים $-1 \le \sin x \le 1$

$$\left|\sin x - \frac{3}{4}\right| = \begin{cases} \sin x - \frac{3}{4} & \sin x \ge \frac{3}{4} \\ -\sin x + \frac{3}{4} & \sin x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$-\frac{5}{4} = -1 - \frac{3}{4} \le \sin x - \frac{3}{4} \le 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} = -1 + \frac{3}{4} \le -\sin x + \frac{3}{4} \le 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

לכן הערך המינימלי הוא אפס והמקסימלי $\frac{7}{4}$

שאלה מספר 11:

משתמשים בהגדרת הנגזרת. אפשר גם בדרכים אחרות.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = (\cos x)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

שאלה מספר 12:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^{x+1}+5^{x+1}}{4^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}+1}{\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^x+\frac{1}{5}}=5$$

השתמשנו בגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$

שאלה מספר 13:

$$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot100}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{49}{100}$$

שאלה מספר 14:

סכום המקדמים בפיתוח של הביטוי $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)^{2019}$ הוא 0.

$$(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)^{2019}=((x-y)^3)^{2019}=(x-y)^{3\cdot2019}$$

סכום המקדמים יתקבל כאשר $x=y=1$.

שאלה מספר 15:

פתרונות המשוואה : $|x|^2+3|x|-10\le0$ הם:

פתרון:

אם $0\le x$ נפתור את אי השיוויון $x^2+3x-10\le0$ ונקבל $-5\le x\le2$ ולכן $0\le x\le2$

אם $0\ge x$ נפתור את אי השיוויון $x^2-3x-10\le0$ ונקבל $-2\le x\le5$ ולכן $-2\le x\le0$

בסה"כ $-2\le x\le2$

שאלה מספר 16:

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x<1$ המקיימת $f(0)=1$ וגם $f'(x)=\frac{1+x^2}{1-x}$ אזי $f(-2)$ שווה:

$$f(x)=\int\frac{1+x^2}{1-x}dx=\int\frac{x^2-1+2}{1-x}dx=\int\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}dx+\int\frac{2}{1-x}dx$$
$$=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2\ln|1-x|+c$$

$$1=f(0)=c \Longrightarrow f(x)=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\ln(1-x)^2+1$$

$$f(-2)=1-ln(9)$$

שאלה מספר 17:

איזו טענה מבין הבאות **אינה** נכונה :

א. לכל x ממשי $\sin x\le x$ (למשל עבור $x=-\pi$)

ב. לכל x ממשי $\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ (נובע מחלוקת הזהות $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ב- $\cos^2 x$)

ג. לכל x ממשי $\cos^2 x+\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)=1$ (כי $\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)=\sin^2 x$)

ד. לכל x ממשי $\sin^2 x\le x^2$

ה. לכל x ממשי $|\sin x|\le|x|$

<u>שאלה מספר 18:</u>

תהא $f(x)=e^{2\sin x}$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ אזי בהכרח:

פתרון: מתקיים $f(0)=e^{2\sin 0}=1$ ולכן $f^{-1}(1)=0$

כמו כן $f'(x)=e^{2\sin x}\cdot 2\cos x$ ולכן $f'(0)=e^{2\sin 0}\cdot 2\cos 0=2$

לכן, $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$

<u>שאלה מספר 19:</u>

יהא $a>0$ ממשי נתון. המשוואה $log_a x\cdot log_3 a=log_a a^3$ מתקיימת עבור x שווה:

$$3=log_a a^3=log_a x\cdot log_3 a=log_a x\cdot\frac{log_a a}{log_a 3}$$

$$3log_a 3=log_a x$$

לכן, $x=3^3=27$

<u>שאלה מספר 20:</u>

תהא $f(x)=(x^2+a)e^x$ אזי

$$f'(\mathrm{x})=(x^2+a)e^x+2xe^x=e^x(x^2+2x+a)$$

הפונקציה מונוטונית עולה כאשר $f'(\mathrm{x})\geq 0$ כלומר אין פתרון למשוואה הריבועית

$x^2+2x+a=0$ כלומר, $4-4a<0$ כלומר $a>1$.