

מבחן סיווג במתמטיקה 14.8.2020 - פתרון

שאלה מס' 1

יהא $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$ נגדיר $w = \frac{z^{2020} - \bar{z}^{2020}}{z^{2020} \cdot \bar{z}^{2020}}$ אזי לכל z :

פתרון: מתקיים $z^{2020} \cdot \bar{z}^{2020} = (z \cdot \bar{z})^{2020} = (|z|^2)^{2020} = |z|^{4040}$
 בנוסף, $z^{2020} - \bar{z}^{2020} = z^{2020} - \overline{z^{2020}} = 2i \operatorname{Im}(z^{2020})$ לכן

$$w = \frac{z^{2020} - \bar{z}^{2020}}{z^{2020} \cdot \bar{z}^{2020}} = \frac{2i \operatorname{Im}(z^{2020})}{|z|^{4040}} = \frac{2 \operatorname{Im}(z^{2020})}{|z|^{4040}} i$$

כלומר w הוא מדומה טהור ולכן $w + \bar{w} = 0$.

שאלה מס' 2

יהא k מספר ממשי כך שהישר: $l: \frac{2+x}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{k}$ לא נחתכים. $\pi: 2x - y - 2z + 4 = 0$ אזי הישר l עובר בנקודה:

פתרון: נמצא תחילה את k : וקטור הכיוון של הישר הוא $(-3, 1, k)$ והנורמל למישור הוא $(2, -1, -2)$.

כיוון שהישר והמישור לא נחתכים, הם מקבילים או מתלכדים ולכן וקטור הכיוון של הישר מאונך לנורמל של המישור, כלומר

$$(2, -1, -2) \cdot (-3, 1, k) = -6 - 1 - 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$$

נציב את הנקודות הנתונות ומתקיים עבור $(-8, 6, -6)$ מתקיים

$$\frac{2-8}{-3} = \frac{6-4}{1} = \frac{-6-1}{-\frac{7}{2}} = -2$$

לכן הנקודה נמצאת על הישר. עבור שאר הנקודות לא מתקיימת הפרופורציה

שאלה מס' 3

יהא $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ויהא $\vec{u}$ וקטור יחידה כך שהערך $|\vec{v} + \vec{u}|$ מקסימלי. אזי המכפלה הסקלרית $\vec{v} \cdot \vec{u}$ שווה:

פתרון: אורך הוקטור $|\vec{v} + \vec{u}|$ יהיה מקסימלי, אם $\vec{v}$ ו- $\vec{u}$ באותו כיוון. במקרה זה $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos 0 = \sqrt{1+2^2+2^2} \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

שאלה מס' 4

הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(x-1)\sqrt{x}}$ שווה:

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(x-1)\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((x+2)-3\sqrt{x})((x+2)+3\sqrt{x})}{(x-1)\sqrt{x}((x+2)+3\sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2-9x}{(x-1)\sqrt{x}(x+2+3\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{(x-1)\sqrt{x}(x+2+3\sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x}(x+2+3\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{\sqrt{x}(x+2+3\sqrt{x})} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

שאלה מס' 5

אוסף כל המספרים המרוכבים z המקיימים $|z-1+3i|=4$ הוא

פתרון: מתקיים $|z-1+3i|=4$, כלומר $|z-(1-3i)|=4$, כלומר זה אוסף המספרים המרוכבים שהמרחק שלהם מהמספר $1-3i$ במישור המרוכב הוא 4, כלומר זה אוסף המספרים המרוכבים הנמצאים על מעגל במישור המרוכב שמרכזו הוא המספר $1-3i$ ורדיוסו 4.

שאלה מס' 6

יהיו $x, y > 0$ ונתונה המשוואה $(\log_2 x)(\log_x 5x)(\log_{5x} y) = \log_y (y^3)$. אז לכל $x > 0$ הערך של y הוא:

פתרון: באגף שמאל מתקיים:

$$(\log_2 x)(\log_x 5x)(\log_{5x} y) = \log_2 x \cdot \frac{\log_2 5x}{\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 y}{\log_2 5x} = \log_2 y$$

מצד שני, באגף ימין $\log_y (y^3) = 3$. לכן קיבלנו את המשוואה $\log_2 y = 3$ ופתרונה הוא $y = 8$.

שאלה מס' 7

יהא m מספר טבעי ($m > 0$). סכום הספרות במספר $(10^m + 1)^3$ הוא:

פתרון: מתקיים

$$(10^m + 1)^3 = (10^m)^3 + 3 \cdot (10^m)^2 + 3 \cdot 10^m + 1$$

סכום הספרות של 10^k הוא 1. לכן סכום הספרות הוא $1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 = 8$.

שאלה מס' 8

יהא $a > 1$. מצאו את קבוצת כל ה- x ים עבורם הפונקציה $f(x) = \log_a x + \log_{ax} x$ חיובית ממש.

פתרון: מתקיים

$$f(x) = \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a ax} = \frac{\log_a x \cdot \log_a ax + \log_a x}{\log_a ax} = \frac{\log_a x (\log_a ax + 1)}{\log_a ax}$$

נפריד למקרים:

המכנה חיובי אם $ax > 1$, כלומר $x > \frac{1}{a}$. במקרה זה המונה צריך להיות חיובי:
 $\log_a x > 0$, כלומר $x > 1$ וגם $\log_a ax + 1 > 0$, כלומר $ax > \frac{1}{a}$ ולכן $x > \frac{1}{a^2}$. במקרה זה נקבל את התחום $(1, \infty)$
או $\log_a x < 0$, כלומר $0 < x < 1$ וגם $\log_a ax + 1 < 0$, כלומר $x < \frac{1}{a^2}$. במקרה זה נקבל מצב של אין פתרון.
המכנה שלילי אם $ax < 1$, כלומר $x < \frac{1}{a}$. במקרה זה המונה צריך להיות שלילי.
 $\log_a x > 0$, כלומר $x > 1$ וגם $\log_a ax + 1 < 0$, כלומר $x < \frac{1}{a^2}$. במקרה זה נקבל מצב של אין פתרון.
 $\log_a x < 0$, כלומר $x < 1$ וגם $\log_a ax + 1 > 0$, כלומר $x > \frac{1}{a^2}$. במקרה זה נקבל את התחום $(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a})$.
תושבה סופית: $(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}) \cup (1, \infty)$.

שאלה מס' 9

מספר המספרים השלמים $x \neq 4$ המקיימים את אי השוויון $\sqrt{\frac{4x-1}{4-x}} > 1$ הוא:

פתרון: נמצא תחילה את תחום ההגדרה של הביטוי מתחת לשורש, כלומר $\frac{4x-1}{4-x} \geq 0$, ולכן תחום ההגדרה הוא $[\frac{1}{4}, 4]$.
המספרים השלמים בתחום זה ששונים מ-4 הם 1, 2, 3. נציב באי השוויון ונקבל:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{4-1}{4-1} = 1 \not> 1$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{4 \cdot 2 - 1}{4 - 2} = \frac{7}{2} > 1$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3 - 1}{4 - 3} = \frac{11}{1} > 1$$

לכן המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון בתחום הם: $x = 2, 3$ ויש רק שני פתרונות.

שאלה מס' 10

האיבר החופשי בפיתוח הביטוי $(x+3) \cdot (2x+3)^2 (3x+3)^3 \dots (10x+3)^{10}$ הוא:

פתרון: האיבר החופשי בפיתוח הביטוי מתקבל כאשר מציבים $x = 0$. במקרה זה נקבל:

$$3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{10} = 3^{1+2+3+\dots+10} = 3^{\frac{(1+10)10}{2}} = 3^{55}$$

שאלה מס' 11

מצאו את המרחק בין המספר המקסימלי והמינימלי המקיימים $x > 2$ וגם $(x-9)(8x+1) \geq (x-9)(x^2+13)$.

פתרון: נעביר אגפים ונוציא גורם משותף.

$$(x-9)(8x+1-x^2-13) = (x-9)(-x^2+8x-12) = -(x-9)(x-2)(x-6) \geq 0$$

לכן התחום בו הביטוי חיובי הוא $[-\infty, 2] \cup [6, 9]$, ועבור $x > 2$ נקבל את התחום $[6, 9]$ והמרחק בין המספר המינימלי והמקסימלי הוא 3.

שאלה מס' 12

יהיו $a, b > 0$ ממשיים. נתון שלכל אחת מהמשוואות $0 = x^2 + 2ax + b$ ו- $0 = bx^2 + 2x + a$ יש שני פתרונות ממשיים שונים. אזי למשוואה $0 = ax^2 + 2bx + 1$:

פתרון: למשוואה $x^2 + 2ax + b = 0$ יש שני פתרונות אם $\Delta = 4a^2 - 4b > 0$, כלומר $a^2 - b > 0$, לכן $\sqrt{b} < a$.

למשוואה $bx^2 + 2x + a = 0$ יש שני פתרונות אם $\Delta = 4 - 4ab > 0$, כלומר $1 - ab > 0$, לכן $ab < 1$, כן $a < 1$ או $b < 1$.

נבדוק עבור $0 = ax^2 + 2bx + 1$: מתקיים ש- $\Delta = 4b^2 - 4a$. צריך לבדוק את הסימן של $b^2 - a$.

אם $b < 1$ אז $b^2 - a < b^2 - \sqrt{b} = b(b^{3/2} - 1) < 0$.

אם $a < 1$ אז $b^2 - a < a^4 - a = a(a^3 - 1) < 0$.

בשני המקרים קיבלנו שלמשוואה אין שורשים ממשיים.

שאלה מס' 13

מצאו את סכום ערכי x הנמצאים בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ ופותרים את המשוואה:
 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

פתרון: מתקיים

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

לכן $\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{4} - x + 2\pi k$ כלומר $2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ לכן $x = \frac{\pi}{24} + \pi k$ ושני הפתרונות הם $\frac{\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}$.
 או $\frac{\pi}{6} + x = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2\pi k$ אבל למשוואה זו אין פתרון.
 סך הכל, קיבלנו שני פתרונות שהם $\frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}$ וסכומם הוא $\frac{26\pi}{24} = \frac{13\pi}{12}$.

שאלה מס' 14

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ נתונה ע"י $f'(x) = \frac{1}{e^x + x^2}$ המקסימום הגלובלי של הפונקציה בתחום $[-2, 2]$ מתקבל ב:

פתרון: כיוון ש- $f'(x) = \frac{1}{e^x + x^2} > 0$ הפונקציה f היא מונוטונית עולה ולכן המקסימום הגלובלי יתקבל עבור $x = 2$.

שאלה מס' 15

נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:
 $f(0) = 1, f'(0) = 1 + \pi, f''(x) = 2 - \pi^2 \sin(\pi x)$ ממשי, x גזירה פעמיים לכל x .
 אזי $f(1)$ שווה:

פתרון: נחשב את f : מתקיים $f'(x) = 2x + \pi \cos(\pi x) + C$. נציב $x = 0$ ונקבל $f'(0) = \pi \cos(\pi \cdot 0) + C = \pi + C = 1 + \pi$.
 כלומר, $f'(x) = 2x + \pi \cos(\pi x) + 1$. נציב $x = 0$ ונקבל $f(0) = C = 1$.
 נציב $x = 1$ ונקבל $f(1) = 1 + \sin(\pi) + 1 + 1 = 3$.

שאלה מס' 16

חשבו: $\int_0^{1/2} \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx$

פתרון: מתקיים

$$\int_0^{1/2} \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx = \ln|x^2-x-2| \Big|_0^{1/2} = \ln\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\right| - \ln|-2| = \ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

שאלה מס' 17

נתונה פונקציה $f : [0, \infty) \rightarrow [-1, 1)$ המוגדרת ע"י $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.
תהא $g(x)$ פונקציה כך שמתקיים $(f \circ g)(x) = x$ אזי $g(x)$ שווה:

פתרון: $g(x)$ היא בעצם הפונקציה ההפוכה של f כלומר $g(x) = f^{-1}(x)$. נמצא אותה

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = x-1 \Rightarrow yx - x = -1 - y \Rightarrow x = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{1-x} \text{ לכן}$$

שאלה מס' 18

חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x) + \sin^2(\pi x)}{x^2} \right)$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x) + \sin^2(\pi x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} \cdot \pi^2 \right) = \frac{1}{2} + \pi^2 = \frac{1 + 2\pi^2}{2}$$

שאלה מס' 19

לפונקציה $f(x) = x^2 - |x|$ יש :

פתרון: הפונקציה $f(x)$ ניתנת לכתיבה באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$

נחקור את הפונקציה. עבור $x > 0$ מתקיים $f'(x) = 2x - 1$ ולכן $x = \frac{1}{2}$ מועמדת לקיצון.
עבור $x < 0$ מתקיים $f'(x) = 2x + 1$ ולכן $x = -\frac{1}{2}$ מועמדת לקיצון.
גם $x = 0$ מועמדת לקיצון כי שם לפונקציה אין נגזרת.

מתקיים:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
f'	-	0	+		-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

לכן יש שתי נקודות מינימום הן $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ונקודת מקסימום אחת $x = 0$.

שאלה מס' 20

תהא a_n סדרה הנדסית אינסופית. נתון ש- $|q| < 1$ ממשי. נתון שסכום שלושת האיברים הראשונים הוא 26 וסכום יתר האיברים הוא 1. מנת הסדרה q היא:

פתרון: מתקיים $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2) = 26$ ובנוסף, סכום כל הסדרה $S = \frac{a_1}{1-q} = 26 + 1 = 27$. לכן $a_1 = 27(1 - q)$ ולכן

$$27(1 - q)(1 + q + q^2) = 27(1 - q^3) = 26 \Rightarrow 1 = 27q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$