

מבחן סיווג במתמטיקה 14.9.21 - פתרון

1. נתון משולש שווה שוקיים ABC . נסמן את אורך השוק AB ב- s . נתון שזווית הראש $\angle BAC = \arccos(0.9)$. מורידים גובה CH ותיכון CM לצלע AB . חשבו את אורך הקטע MH .

פתרון: נסתכל על משולש CMA מתקיים

$$0.9 = \cos \angle BAC = \cos \angle MAC = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AB|}$$

$$\text{ולכן } |AM| = 0.9 |AB| = 0.9s$$

בנוסף, כיוון ש- CH הוא תיכון מתקיים $|AH| = 0.5s$. לכן $|MH| = |AM| - |AH| = 0.9s - 0.5s = 0.4s$.

2. יהא $\vec{v} = (-\sqrt{5}, 2)$ וקטור נתון ו- $\hat{u}$ וקטור היחידה כך שהמכפלה הסקלרית $a = \vec{v} \cdot \hat{u}$ היא מקסימלית. מצאו את a .

פתרון: המכפלה הסקלרית $a = \vec{v} \cdot \hat{u}$ מקסימלית אם כיוון הוקטור $\hat{u}$ הוא בכיוון

$$\text{הוקטור } \vec{v} \text{ כלומר } \hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-\sqrt{5}, 2)}{3}$$

$$\text{במקרה זה } a = (-\sqrt{5}, 2) \cdot \frac{(-\sqrt{5}, 2)}{3} = \frac{1}{3}(5 + 4) = 3$$

3. יהא $k \in (0, 1)$ קבוע נתון. מצאו את מספר הפתרונות הממשיים של המשוואה $|\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 1| = kx$.

$$\text{פתרון: מתקיים } |\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 1| = |x + 3| - 1 = kx \text{ נשים לב, ש-} kx \geq 0 \text{ וכיוון ש-} k > 0 \text{ מתקיים שכל פתרון } x \geq 0$$

נפרד לשני המקרים:

$$\text{א. אם } |x + 3| > 1, \text{ כלומר } x > -2 \text{ או } x < -4 \text{ אז } |x + 3| - 1 = kx$$

$$\text{ב. אם } |x + 3| < 1, \text{ כלומר } -4 < x < -2 \text{ אז } |x + 3| - 1 = -kx$$

במקרה א. נקבל שני מקרים: אם $x > -2$ אז בפרט, $x > -3$ ולכן $x + 3 - 1 = kx$

$$\text{סתירה } x = \frac{2}{k-1} < 0$$

אם $x < -4$ אז בפרט, $x < -3$ ולכן $x + 3 - 1 = -kx$

$$\text{סתירה } x = -\frac{4}{1+k} < 0$$

במקרה ב. אם $-3 \leq x < -2$ אז $x + 3 - 1 = x + 2 = -kx$

$$\text{סתירה } x = -\frac{2}{1+k} < 0$$

אם $-4 < x < -3$ אז או $-kx = -4 - x = -3 - x - 1$ כלומר $x = \frac{4}{k-1} < 0$

סתירה.

בכל ארבעת המקרים קיבלנו שה- x המתקבל הוא שלילי ולכן אין פתרון ממשי

למשוואה.

4. תהא $f : (0, 3) \rightarrow (0, 3)$ פונקציה גזירה והפיכה.
נתון ש- $f(1) = 2$ ו- $f'(1) = 2$. בחרו את התשובה הנכונה.
פתרון: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$.

5. יהיו z_A, z_B, z_C מספרים מרוכבים השונים זה מזה אשר מיוצגים במישור על ידי הנקודות A, B, C בהתאמה.

נתון ש- $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = 180^\circ$. בנוסף, נתון $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{2}$. חשבו את הזווית $\angle ABC$.

פתרון: נסמן $z_A = \sqrt{2}\text{cis}\alpha, z_B = \sqrt{2}\text{cis}\beta, z_C = \sqrt{2}\text{cis}\gamma$. מתקיים $\frac{z_C}{z_A} = \frac{\sqrt{2}\text{cis}\gamma}{\sqrt{2}\text{cis}\alpha} = \text{cis}(\gamma - \alpha)$ לכן $\gamma - \alpha = \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = 180^\circ$.

כל 3 הנקודות נמצאות על מעגל ברדיוס $\sqrt{2}$ כאשר הנקודות A, C נמצאות על הקוטר של המעגל ולכן הזווית $\angle ABC = 90^\circ$.

דרך נוספת: נסמן ב- O את ראשית הצירים. המשולש BOA הוא שווה שוקיים עם זווית הראש $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \beta - \alpha$ וזוויות הבסיס $\frac{180^\circ - (\beta - \alpha)}{2}$.

באותו האופן המשולש COB הוא שווה שוקיים עם זווית הראש $\arg\left(\frac{z_C}{z_B}\right) = \gamma - \beta$ וזוויות הבסיס $\frac{180^\circ - (\gamma - \beta)}{2}$ לכן

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \frac{180^\circ - (\beta - \alpha)}{2} + \frac{180^\circ - (\gamma - \beta)}{2} = \frac{360^\circ - \beta + \alpha - \gamma + \beta}{2} = \\ &= \frac{360^\circ - (\gamma - \alpha)}{2} = \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ\end{aligned}$$

6. נתון שלמשוואה $3^x 5^{\frac{2}{x}} = 75$ יש שני פתרונות a, b . חשבו את 3^{ab} . פתרון א: מתקיים $3^x 5^{\frac{2}{x}} = 3 \cdot 5^2$ לכן

$$\log_3 3^x \cdot 5^{\frac{2}{x}} = \log_3 3^x + \log_3 5^{\frac{2}{x}} = x + \frac{2}{x} \log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 5^2 = 1 + 2 \log_3 5$$

$$x^2 - (1 + 2 \log_3 5)x + 2 \log_3 5 = 0 \text{ ולכן}$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{(1 + 2 \log_3 5) \pm \sqrt{(1 + 2 \log_3 5)^2 - 8 \log_3 5}}{2} = \frac{(1 + 2 \log_3 5) \pm \sqrt{1 - 4 \log_3 5 + (4 \log_3 5)^2}}{2} = \\ &= \frac{(1 + 2 \log_3 5) \pm (1 - 2 \log_3 5)}{2}\end{aligned}$$

לכן $a = 1$ ו- $b = 2 \log_3 5 = \log_3 25$. לכן $3^{ab} = 3^{\log_3 25} = 25$. פתרון ב: כיוון שמתקיים $3^x 5^{\frac{2}{x}} = 3 \cdot 5^2$ מהשוואת המעריכים מקבלים ש- $a = 1$ פותר את המשוואה. לכן $3^{ab} = 3^b = 3^{\log_3 25} = 25$. כעת, ניתן להציב את התשובות ולמצוא את התשובה הנכונה.

7. נתונים a, b מספרים טבעיים כך שהסכום $a + b$ הוא מונימלי ונתון הפולינום $p(x) = (ax + b)^5$. בנוסף, נתון שהמקדם של x^4 בפולינום גדול פי 8 מהמקדם של x^2 בפולינום. מצאו את הסכום $a + b$.
פתרון: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(ax + b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (ax)^k b^{5-k}$$

המקדם של x^4 הוא $5a^4b = 5a^4b$ והמקדם של x^2 הוא $10a^2b^3 = 10a^2b^3$. על פי הנתון $5a^4b = 8 \cdot 10a^2b^3$ לכן $a^2 = 16b^2$ כלומר $a = \pm 4b$. כיוון ש- a, b טבעיים מתקיים $a = 4b$. הסכום מינימלי מתקיים כאשר $b = 1$ ו- $a = 4$ ולכן $a + b = 5$.

8. יהי x המקיים את המשוואה $2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$. נסמן $a = 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x$. חשבו את a .
פתרון: נעלה את המשוואה המקורית בריבוע:

$$\frac{1}{4} = (2 \cos x + \sin x)^2 = 4 \cos^2 x + 4 \cos x \sin x + \sin^2 x = 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x + 1 = a + 1$$

$$a = -\frac{3}{4} \text{ ולכן}$$

9. יהא פולינום $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + bx + a$. נתון שהשארית בחלוקה ב- $x - 1$ היא 15. מצאו את $a + b$.
פתרון א: לאחר חלוקת פולינומים נקבל

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + bx + a = (x^3 + 3x^2 + x + b + 1)(x - 1) + a + b + 1$$

לכן השארית בחלוקה ב- $x - 1$ היא $a + b + 1 = 15$ ולכן $a + b = 14$.
פתרון ב: השארית בחלוקה ב- $x - 1$ מתקבלת מהצבה של 1 בפולינום, כלומר

$$p(1) = 1 + 2 - 2 + b + a = 1 + b + a = 15$$

$$a + b = 14 \text{ ולכן}$$

10. יהיו הפתרונות של המשוואה הריבועית $x^2 + bx + c = 0$ הביעו את $x_1^2 + x_2^2$ בעזרת b, c .

פתרון: על פי נוסחאות וייטה מתקיים $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$ לכן

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = b^2 - 2c$$

11. מצאו מספר ממשי x המקיים:

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} \dots + \frac{x}{1+2+\dots+2021} = 2021$$

פתרון:

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} \dots + \frac{x}{1+2+\dots+2021} = x \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2021} \right) =$$

נשתמש בנוסחה לסכום סדרה חשבונית במכנה של כל אחד מהמחזורים ונקבל סכום טלסקופי

$$\begin{aligned} x \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{2021 \cdot 2022} \right) &= 2x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) \\ &= 2x \left(1 - \frac{1}{2022} \right) = \frac{2x \cdot 2021}{2022} = 2021 \end{aligned}$$

$$x = \frac{2022}{2} = 1011 \quad \text{לכן}$$

12. יהא $a = \int_1^{e^2+0.02} (\ln x)^3 dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^3 dx$. בחרו מבין הבאים את המספר הקרוב ביותר ל- a .

רמז: אין צורך לחשב את האינטגרל כדי לענות על השאלה.
פתרון:

$$\begin{aligned} a &= \int_1^{e^2+0.02} ((\ln x)^3) dx - \int_1^{e^2} ((\ln x)^3) dx = \int_{e^2}^{e^2+0.02} ((\ln x)^3) dx \geq \\ &\int_{e^2}^{e^2+0.02} ((\ln e^2)^3) dx = \int_{e^2}^{e^2+0.02} 8 dx = 8 \cdot 0.02 = 0.16 \end{aligned}$$

מבין כל האפשרויות הנתונות זה המספר הקרוב ביותר ל- a .

13. יהא L הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x$ ומקביל לישר $y = 4x - 3$. מצאו את נקודת החיתוך של הישר L עם הישר $y = \frac{1}{2}x - 2$.
פתרון: כיוון ש- L מקביל ל- $y = 4x - 3$, שיפוע הישר L הוא 4. מצד שני, הישר מקביל ל- $f(x)$ ולכן בנקודת ההשקה $(x_0, f(x_0))$ מתקיים $f'(x_0) = 2x_0 - 2 = 4$.
לכן נקודת ההשקה היא $(3, 3)$, לכן משוואת הישר המשיק היא $y = 4(x - 3) + 3 = 4x - 9$. נמצא את נקודת החיתוך:

$$\frac{1}{2}x - 2 = 4x - 9 \Rightarrow x - 4 = 8x - 18 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2, y = -1$$

14. נתונים שני מישורים

$$\pi_1: x - y - 4z + 3 = 0, \quad \pi_2: 2x - y - 6z + 4 = 0$$

נתונים שני ישרים ℓ_1, ℓ_2 :

ℓ_1 הוא הישר המקביל לשני המישורים ועובר דרך הנקודה $(7, -5, 6)$
 ℓ_2 הוא הישר שהצגתו הקנונית היא:

$$\frac{x-7}{1} = \frac{z-6}{2}, y = -5$$

נסמן ב- α את הזווית החדה בין שני הישרים. חשבו את $\cos \alpha$.
 פתרון: נסמן ב- (a, b, c) את וקטור הכיוון של הישר ℓ_1 . וקטור הכיוון ניצב לנורמלים של שני המישורים, כלומר

$$(1, -1, -4) \cdot (a, b, c) = a - b - 4c = 0$$

$$(2, -1, -6) \cdot (a, b, c) = 2a - b - 6c = 0$$

מחיסור שתי המשוואות נקבל: $a - 2c = 0$, כלומר $a = 2c$ ו- $b = a - 4c = -2c$.
 לכן וקטור הכיוון הוא $(2c, -2c, c)$. נוכל לבחור c כרצוננו לכן נבחר את וקטור הכיוון $(2, -2, 1)$. מצד שני, וקטור הכיוון של הישר השני הוא $(1, 0, 2)$. הזווית בין שני הישרים היא הזווית החדה בין שני וקטורי הכיוון:

$$\cos \alpha = \frac{|(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{1^2 + 0 + 2^2}} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$$

15. יהיו a, b, c מספרים ממשיים חיוביים כך ש- $\log_5(a) + \log_5(c) = 2 \log_5(b)$ אזי:

(א) בהכרח מהווים סדרה הנדסית.

(ב) ה- a, b, c היחידים שמקיימים את המשוואה הם $a = b = c = 1$.

(ג) a, b, c בהכרח מהווים סדרה חשבונית.

(ד) בהכרח מתקיים $a + c = 2b$

(ה) e^a, e^b, e^c בהכרח מהווים סדרה הנדסית.

פתרון: מתקיים $\log_5 ac = \log_5 b^2$ לכן $ac = b^2$, כלומר $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.
 לכן a, b, c מהווים סדרה הנדסית.

16. אוסף כל המספרים המרוכבים $z = x + iy$ המקיימים $|z| = |z - 6|$ הוא:
 פתרון:

$$|x + iy| = |(x - 6) + iy| \Rightarrow x^2 + y^2 = (x - 6)^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 \Rightarrow x = 3$$

כלומר אוסף כל המספרים המרוכבים שהחלק הממשי שלהם שווה ל-3, כלומר $z = 3 + iy$.

17. תהא סדרת מספרים המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = \int_0^1 (8xa_n) dx$. מצאו את a_{500} .
 פתרון: מתקיים $\int_0^1 (8xa_n) dx = 4x^2 a_n \Big|_0^1 = 4a_n$ וכיוון שהפונקציה $\sin^3 x$ אי-זוגית מתקיים $\int_{-a_n}^{a_n} (\sin^3 x) dx = 0$. לכן $a_{n+1} = 4a_n$ וזו סדרה הנדסית עם $a_1 = 1, q = 4$ לכן $a_{500} = a_1 q^{500-1} = 4^{499} = 2^{998}$.

18. נתון $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{2x^2+3x} - ax - b \right) = 0$ חשבו את $a+b$.
 פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{2x^2+3x} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1 - (ax+b)(2x^2+3x)}{2x^2+3x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1 - 2ax^3 - 3ax^2 - 2bx^2 - 3bx}{2x^2+3x} \right) = 0$$

כדי שהגבול יהיה 0 נדרוש שמעלת הפולינום במונה תהיה קטנה ממעלת הפולינום במכנה, כלומר המקדם של x^3 והמקדם של x^2 אמור להיות 0:

$$1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad -3a - 2b = -\frac{3}{2} - 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

סך הכל קיבלנו ש- $a+b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$.

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ שמקיימת $f'(0) = 1$. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - f(0)}{x}$.
 פתרון: נגדיר $g(x) = f(x) \cos x$ מתקיים ש-

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - f(0) \cos 0}{x} = \frac{f(x) \cos x - f(0)}{x}$$

מצד שני, $g'(0) = f'(0) \cos 0 + f(0) (-\sin 0) = f'(0) = 1$.

20. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(25-x^2)}{|x|-2x+4}$.
 פתרון: תחום ההגדרה הוא $25 - x^2 > 0$ כלומר $-5 < x < 5$. בנוסף, $|x| - 2x + 4 \neq 0$. נפתור $|x| = 2x - 4$. מתקיים $x = 2x - 4$ או $x = 4 - 2x$. במקרה הראשון מקבלים $x = 4$ ובמקרה השני מקבלים $x = \frac{4}{3}$. כיוון ש- $|x| > 0$ הפתרון $2x - 4 = |x|$ נפסל. לכן תחום ההגדרה הוא $(-5, 4) \cup (4, 5)$.