מבחן סיווג במתמטיקה 18.10.2017

מס' סטודנט: | | | | | | | | | פקולטה: | | | | | | | | | | | | |

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0.
סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
שאלה 20	
סה"כ	

שאלה מס' 1

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $f'(x) = e^{\cos x} \sin x$.

$$f(x) = \boxed{-e^{\cos x}}$$

.

פתרון: $-\sin x$ **היא הנגזרת ה"פנימית"**

שאלה מס' 2

תהא $f(x) = (1+x^4)^3$. מהו המקדם של x^6 בפולינום שהוא הנגזרת $f'(x)$?

$$a_6 = \boxed{0}$$

פתרון: אפשר לראות שאין איבר בפולינום שחזקתו 7 ולכן בנגזרת לא יהיה איבר שחזקתו 6
ואפשר גם לגזור:

$$f'(x) = 3(1+x^4)^2 4x^3 = 12x^3(1+x^4)^2$$

שאלה מס' 3

מצאו משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(2,3)$ וניצב לישר $2x + 3y = 4$.

$$\boxed{3x - 2y = 0}$$

.

פתרון:

משוואת הישר הנתון היא $2x + 3y = 4$ ולכן $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
נסמן את משוואת הישר הניצב ע"י $y = ax + b$. מכפלת השיפועים שווה -1 ולכן $a = \frac{3}{2}$.
ע"י הצבת הנקודה נקבל $b = 0$ כלומר משוואת הישר היא $3x - 2y = 0$

שאלה מס' 4

הוקטורים $\vec{u}$ ו־ $\vec{v}$ מקיימים: $|\vec{v}| = 3$ $|\vec{u}| = 2$ וגם הזווית בין הוקטורים שווה $\frac{\pi}{3}$.
נסתכל על הוקטורים $\vec{b} = \vec{u} + t\vec{v}$ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v},$. מצאו את t כך שהוקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ יהיו ניצבים.

$$t = \boxed{-\frac{7}{12}}$$

.

פתרון: המכפלה הסקלרית של וקטורים ניצבים היא אפס.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + t\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}|^2 + (1+t)\vec{u}\vec{v} + t|\vec{v}|^2 = 0$$

שאלה מס' 5

כתבו את פתרון אי שוויון הבא כאיחוד של קטעים:
$|x+1|+|x-1|>2$.
אם מדובר בפחות מ־3 קטעים, כתבו $*$ בתיבות הריקות. (הסימון לאיחוד הוא $\cup$).

$\boxed{(-\infty,-1)} \cup \boxed{(1,\infty)} \cup \boxed{*}$

.

פיתרון: שרטטו על ציר המספרים הממשי או פיתרו.

שאלה מס' 6

מצאו את קבוצת הפתרונות של: $\cos x\cos 2x<1$

$\boxed{x\neq 2\pi k, \qquad k\in\mathbb{Z}}$

.

פיתרון: $|\cos\alpha|\leq 1$ לכן גם מכפלתם. יש להוציא את המקרים בהם המכפלה שווה 1

שאלה מס' 7

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(3^x)}{x}=\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x\log_2 3}{x}=\log_2 3}$$

שאלה מס' 8

חשבו :

$$\sin(\arccos(0.6))=\boxed{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(0.6))}=\sqrt{1-0.6^2}=\sqrt{0.64}=0.8}$$

שאלה מס' 9

תנו דוגמא לשתי פונקציות $g(x)$,$f(x)$ חסומות בתחום $(1,\infty)$ כך שהמנה שלהן $\frac{f(x)}{g(x)}$ היא פונקציה לא חסומה בתחום זה.

$$f(x)=\boxed{\frac{1}{x}}$$

.

$$g(x)=\boxed{\frac{1}{x^2}}$$

.

שאלה מס' 10

תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $(-\infty,\infty)$ ומקיימת:

א. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

ב. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

התשובה צריכה להיות בנוסחא אחת.

$$f(x) = \boxed{\tfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}}$$

שאלה מס' 11

מספר מרוכב הנמצא ברביע הראשון נתון ע"י $z_1 = 4cis(\theta)$.
בהנתן, $z_2 = \overline{z_1}$ וגם $S_{\triangle z_1Oz_2} = 4\sqrt{3}$ (שטח המשולש הנוצר מ z_1, z_2 ו־ O שהוא ראשית הצירים).
מצאו את θ.

$\theta = \boxed{60^\circ}$ או $\theta = \boxed{30^\circ}$.

פתרון:

ע"פ הנתון $z_2 = \overline{z_1} = 4cis(-\theta)$ ולכן $S_{\triangle z_1Oz_2} = \frac{4^2\sin(2\theta)}{2}$ כלומר $4\sqrt{3} = 8\sin(2\theta)$

$$\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

או

$$\Rightarrow \quad 2\theta = 120^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

כלומר $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ **או** $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$

שאלה מס' 12

יהיו $P(-1,-2,5)$ ו־ $Q(3,2,6)$ נקודות במרחב.
מצאו משוואת מישור המכיל את נקודות P ו־ Q ומקביל לוקטור $\vec{v}=(4,3,0)$

$$\boxed{3x-4y+4z-25=0}$$

.

פתרון:

משוואת מישור נתונה ע"י $Ax+By+Cz+D=0$ נסמן את הנורמל למישור $(\vec{N}=(A,B,C))$.
$\vec{N}$ ניצב לוקטורים $\vec{v}$ ו־ $\vec{PQ}$ ולכן $\vec{N}\cdot\vec{v}=0$ וגם $\vec{N}\cdot\vec{PQ}=0$. מתקיים: $\vec{PQ}=(4,4,1)$.

$$4A+3B+0C=0$$

$$4A+4B+C=0$$

מפתרון המשוואות נקבל $3x-4y+4z+D=0$ ע"י הצבת אחת הנקודות נקבל את משוואת המישור.

שאלה מס' 13

תארו במילים את המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים את המשוואה:

$$(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=9$$

מעגל ברדיוס 3 שמרכזו ב־ $w=2-i$ (הנקודה $(2,-1)$ במערכת הצירים)

פתרון:

נסמן $w=2-i$. מתקיים $|w|^2=5$. נכתוב את המשוואה $(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=9$

$$9=|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2=|z|^2-(z\bar{w}+w\bar{z})+|w|^2=|z|^2-2Re(z\bar{w})+|w|^2$$

נסמן $z=x+iy$, נציב במשוואה ונקבל:

$(x^2+y^2)-2(2x-y)+5=9$, כלומר $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

שאלה מס' 14

חשבו:

$$\log_{\frac{3}{2}}(\log_8(4))=\boxed{\log_{\frac{3}{2}}(\log_8(8^{\frac{2}{3}}))=\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}=-1}$$

שאלה מס' 15

השתמשו בעובדה ש־

$$x+2x^2+3x^3+\dots 10x^{10}=(x+x^2+x^3+\dots x^{10})+(x^2+x^3+\dots x^{10})+(x^3+\dots x^{10})+\dots+(x^{10})$$

כדי לחשב את הסכום $2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\dots 10\cdot 2^{10}$

$$\boxed{9\cdot 2^{11}+2=18434}$$

פתרון:

$$2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\dots 10\cdot 2^{10}=(2+2^2+2^3+\dots 2^{10})+(2^2+2^3+\dots 2^{10})+(2^3+\dots 2^{10})+\dots+(2^{10})$$

$$=2(2^{10}-1)+2^2(2^9-1)+2^3(2^8-1)+\dots+(2^{10})=9\cdot 2^{11}+2^{10}-(2+2^2+2^3+\cdot 2^9)=9\cdot 2^{11}+2$$

הערה: משתמשים בסכום סדרה הנדסית סופית

שאלה מס' 16

מצאו את <u>כל הפתרונות</u> של המשוואה: $2\cos^2 x+5\sin(x)=4$.
בתחום $0\le x<2\pi$

$$x=\boxed{\frac{\pi}{6}\qquad\frac{5\pi}{6}}$$

פתרון:

נשתמש בזהות $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
המשוואה שקולה ל־ $2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4=0$
נציב $t=\sin x$ על מנת לקבל משוואה ריבועית.

שאלה מס' 17

מצאו את הסכום של 20 האיברים הראשונים של הסדרה ... $1,1,2,\frac{1}{2},4,\frac{1}{4},8,\frac{1}{8},16,\frac{1}{16},$

$$S=\boxed{\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}+\frac{1(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}=2^{10}-\frac{1}{2^9}+1}$$

פתרון:

נרשום את 20 האברים הראשונים בסדרה באופן הבא:
$2^0,(\frac{1}{2})^0,2^1,(\frac{1}{2})^1,2^2,(\frac{1}{2})^2,2^3,(\frac{1}{2})^3,2^4,(\frac{1}{2})^4,\dots 2^9,(\frac{1}{2})^9$

שאלה מס' 18

הישר $a > 0$, $y = ax$ חותך את גרף הפונקציה $f(x) = 4x - x^2$ ברביע הראשון בנקודה A. מצאו את a אם נתון שישר זה מחלק את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר x (ברביע הראשון) לשני אזורים שווי שטח.

$$a = \boxed{4 - \frac{4}{\sqrt[3]{2}}}$$

פתרון:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}|_0^4 = \frac{4^3}{6}$$

נקודות החיתוך (נתון שנמצאות ברביע הראשון) הן: 0, $4 - a$ לכן ($0 < a < 4$)

$$S_1 = \int_0^{a-4} (4x - x^2 - ax)dx = \frac{(4-a)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}|_0^{a-4} = \frac{(4-a)^3}{6}$$

בשאלה נדרש $S = 2S_1$ משווים ומוצאים את a

שאלה מס' 19

מצאו את הפונקציה ההפוכה של $f(x) = \ln(|\arcsin(x^2)|)$ בתחום הגדרתה.

$$f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt{\sin(e^x)}}$$

שאלה מס' 20

נתון הפולינום $p(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$. בנוסף נתון ש־ -2 הוא שורש של הפולינום.
מצאו את הפירוק לגורמים לינאריים של פולינום זה.

$$p(x) = \boxed{(x+2)(x-1)(x-5)}$$

פתרון:

מכיוון ש -2 הוא שורש ניתן לחלק את $p(x)$ בפולינום $x + 2$ ללא שארית.
לאחר ביצוע החלוקה, נקבל: $p(x) = (x+2)(x^2 - 6x + 5)$ ולאחר פירוק הטרינום או מציאת השורשים נקבל: $p(x) = (x+2)(x-1)(x-5)$