הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל   הפקולטה למתמטיקה

פתרון מבחן סיווג במתמטיקה 18.10.18

<u>שאלה מספר 1:</u>

נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת : $f'(2)=5$. אזי הגבול $\lim_{t\to\infty} t(f\left(\frac{2}{t}+2\right)-f(2))$ שווה ל:

<u>פתרון:</u>

ע"פ הגדרה $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ולכן (אם $t\to\infty$ אז $h=\frac{1}{t}\to 0$)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{t}+2\right)-f(2)}{\frac{1}{t}}=\lim_{h\to 0}2\,\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=2f'(2)=10$$

<u>שאלה מספר 2:</u>

עבור איזה ערך של המספר x הנקודה $(11,8,x)$ נמצאת על הישר העובר בנקודות $A(1,2,3)$ ו- $B(6,5,5)$

<u>פתרון:</u> משוואת הישר העובר בנקודות A ו- B היא $\bar{x}=(1,2,3)+t(5,3,2)$

על מנת שהנקודה $(11,8,x)$ תהיה על ישר זה נחפש t כך ש - $(11,8,x)=(1,2,3)+t(5,3,2)$

משני הרכיבים הראשונים נקבל $t=2$ ולכן $x=7$

<u>שאלה מספר 3:</u>

יהיו $x,y\in[1,\infty)$ מספרים ממשיים כך ש- $|x-y|<1$. הערך המינימלי של d המקיים שבהכרח $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|<d$ הוא:

<u>פתרון:</u> מכיוון ש $x,y\geq 1$ אזי $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 2$ ולכן

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{1}{2}$$

שאלה מספר 4:

מצאו זווית חיובית בין הווקטורים השונים מאפס $\bar{u}$ ו- $\bar{v}$ המקיימים: $|\bar{u}+\bar{v}| = |\bar{u}| - |\bar{v}|$

פתרון:

$$(1)\quad |\bar{u}+\bar{v}|^2 = (\bar{u}+\bar{v})(\bar{u}+\bar{v}) = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos(\alpha) + |\bar{v}|^2$$

$$(2)\quad (|\bar{u}| - |\bar{v}|)^2 = |\bar{u}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}| + |\bar{v}|^2$$

מהנתון שמשוואה (1) שווה למשוואה (2) נקבל $\cos(\alpha) = -1$ ולכן $\alpha = \pi$

שאלה מספר 5:

נתון $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{x-3} = \frac{mx+n}{(1-x)(x-3)}$ הסכום $a+b$ שווה:

פתרון: ע"י מכנה משותף באגף שמאל נקבל $a(x\text{-}3)+b(1\text{-}x)=mx+n$ ולכן

$m=a-b$

$n=-3a+b$

$a+b = -(2m+n)$

שאלה מספר 6:

תהא a_n סדרה חשבונית כך שמתקיים: $\frac{S_M}{S_N} = \frac{M^2}{N^2}$ לכל M , N טבעיים, אז:

פתרון: $S_1=a_1$ ולכן $\frac{S_M}{a_1} = M^2$ וגם $\frac{S_N}{a_1} = N^2$ לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית מתקיים

$S_N = \frac{(a_1+a_N)N}{2}$ וגם $S_M = \frac{(a_1+a_M)M}{2}$ אם נציב את a_1 מהמשוואות בשורה הראשונה בנוסחאות בשורה השנייה נקבל $\frac{a_M}{a_N} = \frac{2M-1}{2N-1}$

שאלה מספר 7:

סכום כל המספרים התלת ספרתיים המתחלקים גם ב- 3 וגם ב- 5 הוא:

פתרון: נסתכל על סדרה חשבונית שבה d=15 האיבר הראשון הוא התלת סיפרתי הראשון שמתחלק ב- 15 כלומר a_1=105 ובהתאם a_n=990 . מתקיים $a_n=a_1+(n-1)d$ ולכן מהנתונים נקבל n=60 ואז:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 32850$$

שאלה מספר 8:

יהא z מספר מרוכב המקיים $z^{10} = 1$ נגדיר $w = (1+i)^2 z^5$ אזי $|w|$ שווה:

פתרון: $|w| = |(1+i)^2 z^5| = |(1+i)|^2 |z|^5 = 2$

השתמשנו בנתון ש- $z^{10} = 1$ שממנו נוכל להסיק $|z| = 1$

שאלה מספר 9:

המנה של סדרה הנדסית אינסופית שריבוע סכומה גדול פי 5 מסכום ריבועי אבריה וגם $0 \neq |q| < 1$; $a_1 \neq 0$ שווה ל :

פתרון: מתקיים $\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 = 5 \cdot \frac{a_1{}^2}{1-q^2}$ ולכן $q = \frac{2}{3}$

שאלה מספר 10:

שיפוע הקטע המחבר את נקודת המינימום ונקודת המקסימום של הפונקציה $f(x) = x \cdot ln^2 x$ בתחום $0<x<e$ הוא:

פתרון: $f'(x) = ln^2 x + x 2 l\,n(x) \cdot \frac{1}{x} = l\,n(x)\,(l\,n(x) + 2)$

הנגזרת תתאפס עבור $x_1 = 1$ וגם $x_2 = e^{-2}$ שניהם בתחום ההגדרה (יש לבדוק שאכן קיצון ולא פיתול או בעזרת הנגזרת השנייה או טבלה) מתקיים $f(x_1) = 0$ וגם $f(x_2) = 4e^{-2}$

מתקיים $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{4}{1-e^2}$

שאלה מספר 11:

הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{xsin(x)}$ שווה ל:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{xsin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sin^2 x}{xsin(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

שאלה מספר 12:

נתון ש- x_1, x_2 הם הפתרונות של המשוואה הריבועית $0 = x^2 - 2mx - 3m^2 - n^2$.

הערך של $(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$ הוא:

פתרון: לפי וייטה $x_1 + x_2 = 2m$ וגם $x_1x_2 = -(3m^2+n^2)$ ולכן

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = (m+n)(m-n)$$

שאלה מספר 13:

הביטוי $\ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ שווה ל-

פתרון:

$$ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = ln\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = ln(n+1)$$

שאלה מספר 14:

סכום המקדמים בפיתוח של הפולינום $(2x-3)^{2018} + (3x^2-2)^{2019}$ הוא :

פתרון: על מנת לקבל את סכום המקדמים יש להציב $x=1$ בפולינום. לכן סכום המקדמים הוא 2

<u>שאלה מספר 15:</u>

מספר הפתרונות של המשוואה : $|2^x-1|+|2^x-2|=1$ הוא: **אינסוף**

<u>פתרון</u>: נסמן $2^x=t$ ונפתור $|t-1|+|t-2|=1$ מתקיים $1\leq t\leq 2$ ולכן $0\leq x\leq 1$

<u>שאלה מספר 16:</u>

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x<1$ המקיימת $f(0)=0$ וגם $f'(x)=\frac{1+x}{1-x}$ אזי $f(-1)$ שווה:

פתרון:

$$f(x)=\int\frac{1+x}{1-x}dx=-\int\frac{x+1}{x-1}dx=-\int\frac{x-1+2}{x-1}dx=-\left(\int dx+\int\frac{2}{x-1}dx\right)=$$

$$=-(x+ln(x-1)^2)+c$$

מהנתון נקבל $c=0$ ולכן $f(-1)=1-ln(4)$

<u>שאלה מספר 17:</u>

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\ln(\frac{1}{3+2\sqrt{x}})}$. אז $f'(1)$ שווה ל:

<u>פתרון</u>:

$$f(x)=e^{\ln(\frac{1}{3+2\sqrt{x}})}=\frac{1}{3+2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{\left(3+2\sqrt{x}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-1}{\left(3+2\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}}$$

$$f'(1)=-\frac{1}{25}$$

<u>שאלה מספר 18:</u>

תהא $f(x)$ פונקציה הפיכה המוגדרת על הישר הממשי, המקיימת : $f(1)=2$ וגם $f'(1)=4$. אזי בהכרח:

<u>פתרון</u>: אם $f(x)=y$ אז $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ ולכן $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{4}$

<u>שאלה מספר 19:</u>

<u>מכפלת</u> שני הפתרונות של המשוואה : $8^{(log_8 x)^2} + x^{log_8 x} = 16$ היא

<u>פתרון:</u>

$$8^{(log_8 x)^2} = 8^{log_8 x \cdot log_8 x} = (8^{log_8 x})^{log_8 x} = x^{log_8 x}$$

$$16 = 8^{(log_8 x)^2} + x^{log_8 x} = 2x^{log_8 x}$$

$$(log_8 x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 8; \quad x_2 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 = 1$$

<u>שאלה מספר 20:</u>

תהא $f(x)$ פונקציה זוגית וגזירה בכל הישר הממשי. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x_0 = a$ היא $y = 3x - 2$ אזי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x_1 = -a$ היא:

<u>פתרון:</u> משוואת המשיק בנקודה x_0 נתונה ע"י $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

הפונקציה זוגית ולכן $f(a) = f(-a)$

מהנתון נקבל $f'(a) = 3$ (הנגזרת = שיפוע המשיק בנקודה)

מכיוון שהפונקציה זוגית נגזרתה אי זוגית (תוכיחו) נקבל ש- $f'(-a) = -f'(a) = -3$

כלומר, משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x_1 = -a$ היא $y = -3x - 2$