

מבחן סיווג במתמטיקה 24.3.22

1. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x/2}$. נסמן ב- $f^{(n)}(0)$ את הנגזרת ה- n של $f(x)$ ב-0. חשבו את הסכום $f(0) + f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(20)}(0)$.

(א) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

(ב) $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

(ג) $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

(ד) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

(ה) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

2. נתון שבמשולש ABC מתקיים: $AC = 2t$, $AB = 3$, $BC = 2$. כאשר $t > 0$. עבור אילו ערכי t המשולש ABC הוא קהה זווית?

(א) $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$

(ב) $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$

(ג) $0 < t < \frac{\sqrt{13}}{2}$

(ד) $t > \frac{\sqrt{5}}{2}$

(ה) $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$ או $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$

3. חשבו $\sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$.

(א) 2^{16}

(ב) 2^{17}

(ג) $2 \cdot \binom{16}{8}$

(ד) $136 \cdot \binom{16}{8}$

(ה) $136 \cdot 2^{17}$

4. נתונה הטענה הבאה: "לכל $x > 0$ קיים y כך שלכל $z < y$ מתקיים $z > x$ או $z < -x$ ".

מבלי להתייחס לנכונותה או אי־נכונותה של הטענה, קבעו איזו מבין הטענות הבאות היא שלילה של הטענה הנתונה.

(א) קיים $x \leq 0$ כך שלכל y קיים $z < y$ המקיים $x \geq z$ וגם $z \geq -x$.

(ב) לכל $x \leq 0$ קיים y כך שלכל $z < y$ מתקיים $x \geq z$ וגם $z \geq -x$.

(ג) לכל $x > 0$ קיים y כך שלכל $z \geq y$ מתקיים $x \geq z$ וגם $z \geq -x$.

(ד) קיים $x > 0$ כך שלכל y קיים $z < y$ המקיים $z \leq x$ וגם $-z \leq x$.

(ה) קיים $x > 0$ כך שלכל y קיים $z \geq y$ המקיים $z \leq x$ וגם $z \geq x$.

5. נתונה סדרה הנדסית שמקיימת $a_1 = \sqrt{3} - i, a_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$. חשבו את a_9 .

(א) 2^9

(ב) $-2^8 i$

(ג) $-2^9 i$

(ד) $2^9 i$

(ה) 2^8

6. נתון מספר מרוכב z המקיים $|1 + z| = |1 + |z||$. מה ניתן להגיד בודאות על z ?

(א) z מספר ממשי שלילי.

(ב) z מספר ממשי אי־שלילי.

(ג) z מספר מדומה טהור.

(ד) $z = 0$ או $z = 1$.

(ה) $|z| = 1$

7. תהי הטענה $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 + 10$. בחרו את הטענה הנכונה.

(א) קיים n טבעי אחד בלבד עבורו הטענה נכונה.

(ב) לא קיים n שמקיים את הטענה אבל מתקיים צעד האינדוקציה, כלומר מתקיים: אם הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו אז היא גם נכונה עבור $n + 1$.

(ג) לא קיים n שמקיים את הטענה וגם לא מתקיים צעד האינדוקציה, כלומר לא מתקיים: אם הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו אז היא גם נכונה עבור $n + 1$.

(ד) קיים k טבעי כך שהטענה נכונה לכל $n \geq k$ טבעי.

(ה) קיים k טבעי כך שהטענה נכונה לכל $n > k$ אי־זוגי בלבד.

8. נתון ש- x_1, x_2, x_3 הם פתרונות של המשוואה $x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = 0$.
חשבו את $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

(א) 0

(ב) 2

(ג) 4

(ד) 1

(ה) -2

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \ln(x^2 - 2)$. בחרו את הטענה הנכונה.

(א) ל- $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון מקומי $x = -2$ נקודת מקסימום מקומי ו- $x = 1$ נקודת מינימום מקומי.

(ב) ל- $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון מקומי $x = -2, x = 1$ ושתי נקודות מקסימום מקומי.

(ג) ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון מקומי אחת $x = -2$ שהיא נקודת מקסימום מקומי.

(ד) ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון מקומי אחת $x = 1$ שהיא נקודת מקסימום מקומי.

(ה) ל- $f(x)$ אין נקודות קיצון מקומי.

10. חשבו את הביטוי הבא:

$$\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \right) dx + \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\ln \left(\sqrt{\left| \frac{x}{\cos(2x)} \right|} \right) + C \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{\cos^2(2x)} + C \quad (\text{ב})$$

$$\ln \left(\sqrt{|x|} \right) + \arctan(2x) + C \quad (\text{ג})$$

$$\ln \left(\sqrt{|x|} |\cos(2x)| \right) + C \quad (\text{ד})$$

$$\ln \left(\sqrt{|x|} \right) + \frac{1}{2} \ln |\cos(2x)| + C \quad (\text{ה})$$

11. נתונים הישרים: $\ell_1 : x = y = \frac{z}{3}$, $\ell_2 : x - 1 = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.
נתון שהמישור $Ax + By + 2z + D = 0$ מכיל את הישר ℓ_2 ומקביל לישר ℓ_1 .
חשבו את $A + B + D$.

(א) -2

(ב) -1

(ג) 1

(ד) 2

(ה) 0

12. נתונים וקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ שמקיימים $|\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{v} + \vec{w}|$. בחרו את הטענה הנכונה.

(א) הוקטורים $\vec{v} - \vec{w}$ ו- $\vec{v} + \vec{w}$ מקבילים.

(ב) מתקיים: $(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 1$

(ג) הוקטורים $\vec{v} - \vec{w}$ ו- $\vec{v} + \vec{w}$ ניצבים.

(ד) הוקטורים $\vec{v}$ ו- $\vec{w}$ מקבילים.

(ה) הוקטורים $\vec{v}$ ו- $\vec{w}$ ניצבים.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(-ex^3 + e^2x^2 + ex^2 - e^2x)^3 - \ln(-x^2 + ex + x - e)^3$. בחרו את הטענה הנכונה.

(א) $f(x)$ אינה חח"ע בקטע $(1, e)$ ותמונתה $(3, 6)$.

(ב) $f(x)$ חח"ע בקטע $(1, e)$ ותמונתה $(3, 6)$.

(ג) $f(x)$ חח"ע בקטע $(3, 6)$ ותמונתה $(1, e)$.

(ד) $f(x)$ אינה חח"ע בקטע $(3, 6)$ ותמונתה $[1, e]$.

(ה) $f(x)$ אינה חח"ע בקטע $(3, 6)$ ותמונתה $(1, e)$.

14. חשבו את השטח הנוצר בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$ והישרים $x = 0$ ו- $x = 4$.

(א) $59\frac{1}{2}$

(ב) $58\frac{2}{3}$

(ג) $54\frac{1}{2}$

(ד) 52

(ה) $56\frac{3}{4}$

15. תהי $F(x)$ פונקציה שמקיימת $F(1) = 2$ ו- $F'(x) = \frac{x+1}{x}$. נגדיר סדרה $a_n = F(n)$ לכל n טבעי. חשבו את הסכום $a_1 + a_2 + \dots + a_{200}$.

(א) $\ln(200!) + 20100$

(ב) $\ln(20300) + 200!$

(ג) $\ln(20100) + 200!$

(ד) $\ln(200!) + 20300$

(ה) $\ln(20100) + 20100$

16. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(15-2x-x^2)}{3x-4-|2x-6|}$.

(א) $(-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3)$

(ב) $(-5, 3)$

(ג) $(-5, 2) \cup (2, 3)$

(ד) $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$

(ה) $(-2, 2)$

17. מצאו את סכום הפתרונות של המשוואה $9^x + 4^x - 6^x = 7 \cdot 6^{x-1}$

- (א) 0
- (ב) 1
- (ג) -1
- (ד) 2
- (ה) $\frac{13}{9}$

18. מצאו את סכום כל המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון $\sqrt{10-x} < x-4$.

- (א) 40
- (ב) 41
- (ג) 34
- (ד) 14
- (ה) 21

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ המקיימת $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ו- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) \tan x - 1}{4x - \pi} = 2$. חשבו את $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

- (א) 2
- (ב) 1
- (ג) 0
- (ד) 4
- (ה) 6

20. נתונה זווית α ברביע השני שמקיימת $4 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha = \frac{9}{2}$. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan x}{\pi x \cos \alpha}$.

- (א) -2
- (ב) 0
- (ג) $-\frac{1}{2}$
- (ד) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (ה) $-\sqrt{2}$