

מבחן סיווג במתמטיקה 24.6.21 - פתרון

1. מצאו את אוסף כל הפתרונות של אי השוויון $\log_2(2 \sin x) - \log_2(\cos x) < 1$ בתחום $[0, 2\pi]$.

פתרון:

תחום ההגדרה של אי השוויון הוא $\sin x > 0$ וגם $\cos x > 0$ כלומר $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. נפתור את אי השוויון:

$$\log_2(2 \sin x) - \log_2(\cos x) = \log_2\left(\frac{2 \sin x}{\cos x}\right) = \log_2(2 \tan x) < 1$$

לכן, $2 \tan x < 2$, כלומר $\tan x < 1$. בתחום ההגדרה $\tan x < 1$ כאשר $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

2. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x) = 2 \sin x - \sqrt{5} \cos x$.

פתרון:

הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי בנקודות בהן $f'(x) = 0$. מתקיים $f'(x) = 2 \cos x + \sqrt{5} \sin x = 0$, נדרוש, $2 \cos x = -\sqrt{5} \sin x$. נעלה את המשוואה בריבוע: $4 \cos^2 x = 5 \sin^2 x = 5(1 - \cos^2 x) = 5 - 5 \cos^2 x$, לכן בנקודות הקיצון של הפונקציה מתקיים: $\cos^2 x = \frac{5}{9}$, $\sin^2 x = \frac{4}{9}$. כלומר, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin x = \pm \frac{2}{3}$. הערך המקסימלי של הפונקציה מתקבל כאשר $\sin x > 0$ ו- $\cos x < 0$ והוא שווה ל- $2 \cdot \frac{2}{3} - \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$.

3. מצאו את התמונה של הפונקציה $f(x) = (x-1)|x-3|$ כאשר $x \in [1, 4]$.

פתרון:

בתחום $[3, 4]$ הפונקציה $f(x) = (x-1)(x-3)$ היא מונוטונית עולה ולכן התמונה בתחום זה היא $[f(3), f(4)] = [0, 3]$. בתחום $[1, 3]$ הפונקציה $f(x) = (x-1)(3-x) = -(x-1)(x-3)$ זוהי פרבולה עצובה שמקבלת את המקסימום שלה ב- $x = 2$ והערך המקסימלי הוא 1 לכן התמונה בתחום זה היא $[0, 1]$. סך הכל התמונה היא $[0, 3]$.

4. מצאו את כל המספרים השלמים n שעבורם מתקיים השוויון $(1+i)^n = (1-i)^n$.
פתרון: נשתמש בייצוג טריגונומטרי: $1+i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$, $1-i = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ לכן

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \text{cis} \frac{\pi n}{4} = \left(\sqrt{2}\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \text{cis}\left(-\frac{\pi n}{4}\right)$$

לכן $\frac{\pi n}{4} = -\frac{\pi n}{4} + 2\pi k$ ולכן $n = 4k$ שלם.

5. נתון מספר מרוכב $z = \sqrt{3} - i$. מצאו מספר מרוכב w כך ש- $|w| = 2|z|$ וגם $\arg(w) - \arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

פתרון: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ ולכן $|w| = 4$. בנוסף, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$ ולכן $\arg w = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ולכן $w = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$.

דרך נוספת:

למדנו ש- $\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ כאשר $\theta_1 - \theta_2 = \arg(w) - \arg(z) = \frac{\pi}{3}$.
לכן, $w = 2z\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$.

6. מצאו את המקדם של x^4 בפיתוח הביטוי $x^2\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$.
פתרון: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$x^2\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^2\left(\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2x)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}\right) = x^2\left(\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k x^k x^{k-6}\right) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k x^{2k-4}$$

נדרוש $2k - 4 = 4$ ולכן $k = 4$. המקדם המתאים הוא $\binom{6}{4} 2^4 = \frac{6 \cdot 5}{4} \cdot 2^4 = 240$.

7. מצאו ערך של $a > 0$ כך שלמשוואה $2\ln(x+3) = \ln(ax)$ יש פתרון יחיד.

פתרון:

נרצה $\ln(x+3)^2 = \ln(ax)$. $f(x) = \ln(x)$ היא פונקציה ולכן $x^2 + 6x + 9 = ax$.
כלומר $x^2 + (6-a)x + 9 = 0$ קיבלנו משוואה ריבועית.

כדי שיהיה לה פתרון יחיד נדרוש $\Delta = (6-a)^2 - 36 = 12a - a^2 = a(12-a) = 0$ ולכן $a = 12$.

8. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, \dots$ שמקיימת $a_3 < a_2 < a_4$ אזי בהכרח:

(א) $a_1 \cdot a_2 < 0$

(ב) $a_3 \cdot a_4 > 0$

(ג) $a_2 \cdot a_4 < 0$

(ד) $a_3 > 0$

(ה) $a_2 < 0$

פתרון:

מהגדרת סדרה הנדסית: $a_3 = a_2q$, $a_4 = a_2q^2$
 ולכן, $a_2 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_2q^2 = a_2^2q^2$, בעלי אותו סימן.
 נניח ש- $a_2, a_4 < 0$:
 אם $q > 0$ אז מהנתון ש- $a_3 < a_2$ מתקיים $a_3 = a_2q < a_2q < a_3$ בסתירה לנתון.
 אם $q < 0$ אז $a_3 = a_2 \cdot q > 0 > a_2$ בסתירה לנתון.
 לכן נקבל, $a_2, a_4 > 0$.
 אם $q > 0$ אז $a_4 = a_3q < a_2q = a_3$ בסתירה לנתון.
 לכן $q < 0$ ומתקיים: $a_2 = a_1q > 0$ ו- $q < 0$ ולכן $a_1 < 0$, כלומר $a_1 \cdot a_2 < 0$.

9. נתונה סדרה שמקיימת את נוסחת הנסיגה: $a_1 = -\frac{1}{3}$ ו- $a_{n+1} = -\frac{3^{n-2}}{a_n}$, עבור $n = 1, 2, \dots$. חשבו את הסכום $a_1 + \dots + a_{55}$.

פתרון: מתקיים

$$a_{n+1} = -\frac{3^{n-2}}{a_n} = -\frac{3^{n-2}}{-\frac{3^{n-3}}{a_{n-1}}} = 3a_{n-1}$$

לכן האיברים במקומות האי-זוגיים הם סדרה הנדסית עם $q = 3$, $a_1 = -\frac{1}{3}$
 והאיברים במקומות הזוגיים הם סדרה הנדסית עם $q = 3$, $a_2 = 1$.
 בסדרת המקומות האי-זוגיים יש 28 איברים שסכומם הוא $-\frac{\frac{1}{3}(1-3^{28})}{1-3}$.

בסדרת המקומות הזוגיים יש 27 איברים שסכומם הוא $\frac{1(1-3^{27})}{1-3}$. לכן

$$a_1 + \dots + a_{55} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + 3^{27} + 1 - 3^{27} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

10. נתון $3^x = 32$, $4^y = 7$, $49^z = 81$. חשבו את xyz .

פתרון:

מתקיים $3^x = 2^5$, $2^{2y} = 7$, $7^{2z} = 3^4$ לכן

$$7^{2zx} = 3^{4x} = (2^5)^4 = 2^{20} = (2^2)^{10} \Rightarrow 7^{2zxy} = \left((2^2)^{10} \right)^y = (2^{2y})^{10} = 7^{10}$$

ולכן $2zxy = 10 \Rightarrow xyz = 5$

11. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ו- $f(1) = 20$.

חשבו את הסכום $\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(2020)}{f(2021)}$.

פתרון:

מתקיים, $\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n)f(1)} = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{20}$, לכן

$$\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(2020)}{f(2021)} = 2020 \cdot \frac{1}{20} = 101$$

12. נתון ש- $P(x)$ הוא פולינום ממעלה 2. נתון $P(3) = 1, P(2) = P(5) = 0$. מצאו את $P(1)$.
פתרון:

מתקיים: $P(x) = a(x-2)(x-5)$, לכן $1 = P(3) = a(3-2)(3-5) = -2a$, ולכן $a = -\frac{1}{2}$.
כלומר $P(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-5)$, לכן $P(1) = -\frac{1}{2}(1-2)(1-5) = -2$.

13. חשבו את: $\int_0^\pi x \cos x dx$.
פתרון:

נשתמש באינטגרציה בחלקים: $u = x \Rightarrow u' = 1, v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$
לכן

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x = \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

14. נתונה פונקציה $f(x)$ שמקיימת $f'(x) = \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}$ ו- $\sqrt[4]{3} = f(\frac{\pi}{3})$. חשבו את $f(\frac{\pi}{4})$.
פתרון:

נסמן $t = \tan x$ לכן $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. מתקיים

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{2 \sin x \cos x} \frac{\cos x}{\cos x} dx =$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{\tan x} \cos^2 x} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\tan x} + C$$

לכן $\sqrt[4]{3} = f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{\tan(\frac{\pi}{3})} + C = \sqrt{\sqrt{3}} + C = \sqrt[4]{3} + C$, ולכן $C = 0$.
לכן $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\tan(\frac{\pi}{4})} = 1$.

15. חשבו את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$.
פתרון: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$.

16. נתון משולש ABC במישור. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{BC} = \vec{v}$. בנוסף, נתונים התיכונים $\vec{AF}, \vec{BE}, \vec{CD}$.
חשבו את $\vec{CD} + \vec{BE} + \vec{AF}$.

פתרון:

מחשבון וקטורים נקבל: $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$
 $\vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{BE} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$, $\vec{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
ולכן, $\vec{CD} + \vec{BE} + \vec{AF} = 0$.

17. נתונים המישור $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ והנקודות $A(k^2, 1, k)$ ו- $B(3, -k, -2)$. מצאו כל ערכי k עבורם הישר העובר דרך הנקודות A, B מקביל למישור הנתון ולא מוכל בו.
פתרון:

כיוון שהישר העובר דרך שתי הנקודות מקביל למישור, הוקטור $\vec{AB} = (3 - k^2, -k - 1, -2 - k)$ ניצב לנורמל של המישור $(2, -3, 4)$, כלומר

$$(2, -3, 4) \cdot (3 - k^2, -k - 1, -2 - k) = 2(3 - k^2) - 3(-k - 1) + 4(-2 - k) = 0$$

$$-2k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} = -1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$

בנוסף, שתי הנקודות לא נמצאות על המישור וזה מתקיים עבור $k = \frac{1}{2}$.

18. נתונה פונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x$. מבין התחומים הבאים סמנו את התחום בו הפונקציה $f(x)$ היא חד חד ערכית.
פתרון:

נמצא את נקודות קיצון של $f(x)$. מתקיים $f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 = 3(x^2 - 2x - 15) = 3(x+3)(x-5)$, כלומר נקודות הקיצון של $f(x)$ הן $-3, 5$. תחום בו פונקציה חח"ע הוא תחום שלא כולל את נקודות הקיצון והתחום היחיד שמתאים מבין התחומים הנתונים הוא $x < -3$.

$$(א) \quad x < -3$$

$$(ב) \quad -2 < x < 7$$

$$(ג) \quad -5 < x < 5$$

$$(ד) \quad x > 0$$

$$(ה) \quad -7 < x < 2$$

19. נתונים מספרים ממשיים b, c כך ש- $c < 0$, ונתון שקבוצת הפתרונות הממשיים של אי השוויון $x^2 + bx + c < 0$ היא $\{x \mid p < x < q\}$ כאשר p, q מספרים ממשיים. מצאו את קבוצת הפתרונות של אי השוויון $x^2 + bcx + c^3 < 0$.
פתרון:

כיוון שקבוצת הפתרונות של אי השוויון $x^2 + bx + c < 0$ היא $\{x \mid p < x < q\}$ מתקיים ש- p, q הם פתרונות של המשוואה $x^2 + bx + c = 0$. על פי נוסחאות וייטה מתקיים $p+q = -b, pq = c$. נסמן ב- x_1, x_2 את הפתרונות של $x^2 + bcx + c^3 = 0$. אוסף הפתרונות של אי השוויון $x^2 + bcx + c^3 < 0$ הוא $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$. מתקיים $x_1 + x_2 = -bc, x_1 x_2 = c^3$. נציב ונקבל

$$x_1 + x_2 = (p+q)c = pc + qc, x_1 x_2 = pqc^2 = (pc)(qc)$$

לכן הפתרונות של המשוואה הם pc, qc וכיוון ש- $c < 0$ מתקיים $qc < pc$ ולכן קבוצת הפתרונות $\{x \mid qc < x < pc\}$.

20. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x(x-1)}$
פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} = \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} = 1$$

השתמשנו בכך ש- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ זו הגדרת הנגזרת של הפונקציה $\ln x$ ב- $x = 1$.