

מבחן סיווג במתמטיקה 24.6.22

פתרון

1. נתונה סדרה הנדסית a_n שאיברה הראשון a_1 והמנה שלה היא $q \neq 1$ כאשר a_1, q מספרים טבעיים. נתון ש- $a_{21} = 4^{11}$.
 חשבו את S_{20} - סכום 20 האיברים הראשונים.
 פתרון: מתקיים $a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 4^{11} = 2^{22} = 4 \cdot 2^{20}$ ולכן $a_1 = 4, q = 2$.
 לכן: $S_{20} = \frac{4(1-2^{20})}{1-2} = 4(2^{20} - 1) = 4^{11} - 4$.

2. נתון משולש ABC שבו כל הזוויות קטנות מ- 120° כך שמתקיים $\angle B = 30^\circ$ ו- $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$ אז:
 פתרון: נסמן $\angle C = \alpha$. על פי משפט הסינוסים מתקיים: $\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$ ולכן $\sqrt{2} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ}$ ולכן $\sqrt{2} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2}}$ ולכן $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$ וכן $\alpha = 45^\circ$.
 לכן $\angle A = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

3. חשבו את הביטוי $\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} i^k$ כאשר $i^2 = -1$.
 פתרון: על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} i^k = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} i^k \cdot 1^{42-k} = (i+1)^{42} = ((i+1)^2)^{21} = (2i)^{21} = 2^{21} i^{21} = 2^{21} i$$

4. תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת: לכל $y > 0$ קיים $x > 0$ כך ש- $f(x) < y$. אז בהכרח:
 פתרון: המשפט שקול למשפט הבא: לא קיים $y > 0$ עבורו לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) \geq y$.

5. נתונה המשוואה $\bar{z} = iz^2$. מצאו את מספר הפתרונות המרוכבים של המשוואה.
 פתרון: נסמן $z = r \operatorname{cis} \theta$ מתקיים

$$r \operatorname{cis}(-\theta) = ir^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) r^2 \operatorname{cis}(2\theta) = r^2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$$

לכן $r = r^2$ כלומר $r = 0$ או $r = 1$, ו- $-\theta = \frac{\pi}{2} + 2\theta + 2\pi k$ כלומר $-\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ כלומר $\theta = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}k$.
 לכן $\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$.
 לכן למשוואה יש 4 פתרונות והם: $z_1 = 0, z_2 = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right), z_4 = \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

6. חשבו את $z = \frac{1}{i + \frac{1}{1+i}}$.
 פתרון:

$$z = \frac{1}{i + \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i(1+i) + 1} = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{1-i}{1} = 1-i$$

7. לכל n טבעי נתונה הטענה $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = -n(2n+1)$. בחרו את ההיגד הנכון.

פתרון: נבדוק בעזרת אינדוקציה האם הטענה נכונה לכל n טבעי:

בדיקה: עבור $n = 1$ מתקיים: $1^2 - 2^2 = -3 = -1(2+1)$.

נניח שהטענה נכונה לכל n ונראה שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש-

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 - (2n+2)^2 = -(n+1)(2n+3)$$

מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 - (2n+2)^2 =$$

$$-n(2n+1) + (2n+1)^2 - (2n+2)^2 = -2n^2 - n + 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 8n - 4 =$$

$$-2n^2 - 5n - 3 = -(n+1)(2n+3)$$

ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי ובפרט קיים $k = 1$ כך שהטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

8. חשבו את סכום המקדמים של הפולינום

$$p(x) = (2x-4)^{31} + (3-x)^{30}$$

פתרון: סכום מקדמי הפולינום שווה ל:

$$p(1) = (2-4)^{31} + (3-1)^{30} = (-2)^{31} + 2^{30} = 2^{30}(-2+1) = -2^{30}$$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$. בחרו את הטענה הנכונה

פתרון: נמצא תחילה את תחום ההגדרה של $f(x)$: נדרוש $x^2 - x = x(x-1) > 0$ כלומר תחום ההגדרה הוא $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

נמצא מועמדים לקיצון: $f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{2x-1}{(x^2-x)^{3/2}} = 0$ אם ורק אם $x = \frac{1}{2}$. אבל $x = \frac{1}{2}$ לא בתחום ההגדרה ולכן לפונקציה אין נקודות קיצון.

10. חשבו את הביטוי הבא:

$$\int \ln((\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x) dx - \int \tan x dx$$

פתרון:

$$\int \ln((\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x) dx - \int \tan x dx =$$

$$\int \ln(\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - \sin 2x) dx - \int \tan x dx =$$

$$\int \ln 1 dx - \int \tan x = - \int \frac{\sin x}{\cos x} = \ln |\cos x| dx + C$$

11. מצאו את מספר ערכי a האפשריים בקטע $[-\pi, 2\pi]$ עבורם הישר $\ell : 2(x - a) =$

$$\frac{y - e^a}{\sin(a)} = \frac{z - a}{\cos(a)}$$

והמישור $\pi : x + \cos(a)y + \sin(a)z = e^{3a}$ מוגדרים ומקבילים.

פתרון: הישר מקביל למישור אם וקטור הכיוון של הישר ניצב לנורמל של המישור.

וקטור הכיוון של הישר הוא $(\frac{1}{2}, \sin(a), \cos(a))$ והנורמל למישור הוא $(1, \cos(a), \sin(a))$. נדרוש:

$$\left(\frac{1}{2}, \sin(a), \cos(a)\right) \cdot (1, \cos(a), \sin(a)) = \frac{1}{2} + 2\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2} + \sin(2a) = 0$$

לכן $\sin(2a) = -\frac{1}{2}$, כלומר $2a = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ או $2a = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

לכן $a = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ או $a = \frac{7\pi}{12} + \pi k$. עבור כל אחת מהאפשרויות יש 3 ערכים אפשריים בתחום הנתון ולכן סך הכל יש 6 ערכי a אפשריים.

12. נתונים וקטורים $\vec{u}, \vec{v}$ כך ש- $\vec{v} \neq \pm \vec{u}$. נסמן $\vec{a} = |\vec{u}| \vec{v} + |\vec{v}| \vec{u}$, $\vec{b} = |\vec{u}| \vec{v} - |\vec{v}| \vec{u}$

בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: אם $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \pm \vec{u}$ וגם $\vec{v} \neq \pm \vec{u}$ מתקיים ש- $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. בנוסף מתקיים

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{u}| \vec{v} + |\vec{v}| \vec{u}) \cdot (|\vec{u}| \vec{v} - |\vec{v}| \vec{u}) =$$

$$|\vec{u}|^2 \vec{v} \cdot \vec{v} - |\vec{u}| |\vec{v}| \vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{v}| |\vec{u}| \vec{u} \cdot \vec{v} - |\vec{v}|^2 \vec{u} \cdot \vec{u} =$$

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 = 0$$

ולכן $\vec{a}, \vec{b}$ ניצבים.

13. נתונה פונקציה $f : (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \tan x + \ln(\ln x)$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: מתקיים $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} > 0$ לכל $x \in (1, \frac{\pi}{2})$ כלומר f מונוטונית עולה ממ"ש ולכן f חח"ע בקטע.

בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ולכן $f(x)$ מקבלת את כל הערכים ב- $\mathbb{R}$ ולכן f על.

14. חשבו את השטח הנוצר בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = -\sin(\pi x), g(x) = 4^x - 1$

$$4^x - 1$$

והישרים $x = -\frac{1}{2}$ ו- $x = \frac{1}{2}$.

פתרון: מתקיים $f(0) = -\sin(\pi \cdot 0) = 0 = 4^0 - 1 = g(0)$

בנוסף, לכל $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ מתקיים $f(x) > g(x)$ ולכל $x \in (0, \frac{1}{2})$ מתקיים $g(x) > f(x)$.

לכן השטח בין שני הגרפים הוא

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (-\sin(\pi x) - (4^x - 1)) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (4^x - 1 - (-\sin(\pi x))) dx =$$

$$\left(\frac{\cos(\pi x)}{\pi} - \frac{4^x}{\ln 4} + x \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \left(\frac{4^x}{\ln 4} - x - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\ln 4} - \left(-\frac{4^{-1/2}}{\ln 4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{4^{1/2}}{\ln 4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\pi} \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\ln 4} + \frac{1}{2 \ln 4} + \frac{2}{\ln 4} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2 \ln 4}$$

15. לכל n טבעי נסמן $(e^{3x})^{(n)}$ ו- $F_n(x) = (2e^{3x})^{(n)}$ כאשר $G_n(x) = (2e^{3x})^{(n)}$ מסמן את הנגזרת ה- n של e^{3x} ו- $(2e^{3x})^{(n)}$ מסמן את הנגזרת ה- n של $2e^{3x}$.
חשבו את המנה $\frac{G_{21}(1)}{F_{18}(1)}$.
פתרון: נמצא את החוקיות של הנגזרת:

$$F_1(x) = 3e^{3x}, F_2(x) = 3^2 e^{3x}, \dots, F_{18}(x) = 3^{18} e^{3x} \Rightarrow F_{18}(1) = 3^{18} e^3$$

$$G_1(x) = 2 \cdot 3e^{3x}, G_2(x) = 2 \cdot 3^2 e^{3x}, \dots, G_{21}(x) = 2 \cdot 3^{21} e^{3x} \Rightarrow G_{21}(1) = 2 \cdot 3^{21} e^3$$

$$\frac{G_{21}(1)}{F_{18}(1)} = \frac{2 \cdot 3^{21} e^3}{3^{18} e^3} = 2 \cdot 3^3 = 54 \text{ ולכן}$$

16. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(3+2x-x^2)}{\sqrt{\sin(\pi x)}}$.
פתרון: נדרוש: $3+2x-x^2 = -(x+1)(x-3) > 0$ כאשר $x \in (-1, 3)$.
לכן נבדוק עבור אילו $x \in (-1, 3)$ מתקיים $\sin(\pi x) > 0$ וזה מתקיים עבור $x \in (0, 1) \cup (2, 3)$.

17. נתון פולינום $p(x) = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$ כך שמתקיים $a + c = b$. איזה מהמספרים הבאים הוא בהכרח שורש של הפולינום?
פתרון: על פי הנתון $p(-1) = a - b + c = 0$ ולכן -1 הוא שורש של הפולינום.
נסמן את השורש השני ב- α .
על פי נוסחאות וייטה מתקיים: $\alpha = \frac{c}{a}$ ולכן $(-1) \cdot \alpha = -\frac{c}{a}$.

18. מצאו את סכום כל המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון $\log_{0.5}(\sqrt{29-x}) > \log_{0.5}(x+1)$.
פתרון: תחום ההגדרה של אי השוויון הוא $x \in (-1, 29)$ מתקיים

$$\log_{0.5}(\sqrt{29-x}) > \log_{0.5}(x+1) \Rightarrow \sqrt{29-x} < x+1$$

כיוון שהביטויים חיוביים אי השוויון שקול לאי-שוויון $29-x < x^2 + 2x + 1$ כלומר $x^2 + 3x - 28 = (x+7)(x-4) > 0$ אם $x \in (-\infty, -7) \cup (4, \infty)$ אם ורק אם $x \in (-\infty, -7) \cup (4, \infty)$.
המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון בתחום ההגדרה הם $5, 6, 7, \dots, 28$ ועל פי סכום של סדרה חשבונית נקבל:

$$5 + 6 + \dots + 28 = \frac{(5+28) \cdot 24}{2} = 33 \cdot 12 = 396$$

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ המקיימת $f(e) = 2$ ו- $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) \ln x - 2}{x - e} = \frac{3}{e}$.
 חשבו את $f'(e)$.

פתרון: נסמן $g(x) = f(x) \ln x$. מתקיים $g'(x) = f'(x) \cdot \ln x + f(x) \cdot \frac{1}{x}$ ולכן
 $g'(e) = f'(e) \cdot \ln e + f(e) \cdot \frac{1}{e} = f'(e) + \frac{2}{e}$. מצד שני, על פי ההגדרה מתקיים:

$$g'(e) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) \ln x - f(e) \ln e}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) \ln x - 2}{x - e} = \frac{3}{e}$$

ולכן $f'(e) + \frac{2}{e} = \frac{3}{e}$ לכן $f'(e) = \frac{1}{e}$.

20. נתון $a \in \mathbb{R}$ המקיים $2^{a-2} \cdot 5^a - 2^a \cdot 5^{a-1} = 50$. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi x \sin(\frac{\pi}{2} ax)}{\arctan(4 - ax)}$.
 פתרון: נפתור תחילה את המשוואה:

$$2^{a-2} \cdot 5^a - 2^a \cdot 5^{a-1} = 2^{a-2} \cdot 5^{a-1} (5 - 2^2) = 2^{a-2} \cdot 5^{a-1} = 50 = 2 \cdot 5^2$$

ולכן בהכרח $a = 3$. נחשב את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi x \sin(\frac{\pi}{2} 3x)}{\arctan(4 - 3x)} = \frac{\pi \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})}{\arctan(1)} = \frac{\pi(-1)}{\frac{\pi}{4}} = -4$$