מבחן סיווג במתמטיקה 30.08.18

<u>שאלה 1</u>

נתון כי $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$. נגדיר $g(x)=f(x)-f(\ln(x)+1)$. אז $g'(1)$ שווה ל

<u>פתרון:</u>

$$g'(x)=f'(x)-f'(\ln(x)+1)\frac{1}{x}$$

$$g'(1)=f'(1)-f'(\ln(1)+1)\frac{1}{1}=0$$

<u>שאלה 2</u>

יהא $1\neq a>0$ אזי $log_{a^2}(a)\cdot log_{a^3}(a^2)\cdot log_{a^4}(a^3)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot log_{a^n}(a^{n-1})$

שווה ל

<u>פתרון:</u>

$$log_{a^2}(a)\cdot log_{a^3}(a^2)\cdot log_{a^4}(a^3)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot log_{a^n}(a^{n-1})=\frac{log_a(a)}{log_a(a^2)}\cdot\frac{log_a(a^2)}{log_a(a^3)}\dots\frac{log_a(a^{n-1})}{log_a(a^n)}=\frac{1}{n}$$

<u>שאלה 3</u>

המקדם של x^{16} בפיתוח של $(x-2)^9(x+2)^8$ הוא

<u>פתרון:</u>

$$(x-2)^9(x+2)^8=(x-2)(x-2)^8(x+2)^8=(x-2)(x^2-4)^8$$

x^{16} יתקבל רק מהמחובר הראשון בגורם השני (נוסחאת הבינום) כל שאר החזקות זוגיות ולכן כשנכפיל ב x-2 נקבל שהמקדם הוא -2.

<u>שאלה 4</u>

נתונה פונקציה המקיימת $f'(3)=5$. הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h+3)-f(3)}{h}$ שווה ל:

<u>פתרון:</u>

ע״פ הגדרה $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ ולכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h+3)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}2\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}=2f'(3)=10$$

שאלה 5

המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 8x + 15$ בנקודה $x_0 = 1$ חותך את הישר $y = 4x - 6$ בנקודה:

פתרון: משוואת המשיק היא $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

לכן משוואת המשיק של $f(x)$ בנקודה $x_0 = 1$ היא $y = -6x + 14$ ולכן נקודת החיתוך היא: $(2,2)$.

שאלה 6

מכפלת שני הפתרונות של המשוואה $log_4\sqrt{x} - log_x 2 + 1 = 0$ היא

פתרון:

$$0 = log_4\sqrt{x} - log_x 2 + 1 = log_4 x^{\frac{1}{2}} - \frac{\log_4 2}{\log_4 x} + 1 = \frac{1}{2} log_4 x - \frac{1}{2}\frac{1}{\log_4 x} + 1$$

נסמן $t = log_4 x$ נשים לב: $t_1 + t_2 = log_4 x_1 + \log_4 x_2 = \log_4 x_1 \cdot x_2$

נקבל את המשוואה הריבועית $t^2+2t-1=0$ ולפי וייטה $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = -2$ ולכן $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{16}$

שאלה 7

איזו מהטענות הבאות נכונות בהכרח עבור **כל** פונקציה מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$

($a\neq 0$ ו- x מספר ממשי)

פתרון: הפונקציה מתאפסת רק בנקודה אחת ולכן **גרף הפונקציה משיק לציר ה – x** .

זהו לא בהכרח מינימום למשל במקרה שבו a שלילי מתקבל מקסימום

שאלה 8

השטח החסום ע"י הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ והישרים $x=m$ ו- $x=2m$ שווה:

פתרון: $$\int_m^{2m} f(x)dx = \int_m^{2m} \frac{1}{x} dx = \ln|x|_m^{2m} = \ln 2$$

שאלה 9

המספר המחזורי .....0.123612361236 שווה לשבר המצומצם הבא:

פתרון: $$0.123612361236 \ldots. = \frac{1236}{9999} = \frac{412}{3333}$$

שאלה 10

שני האיברים האמצעים בסדרה חשבונית בת 100 איברים הם $a_{50}=5.98;\ \ a_{51}=6.06$.

סכום אברי הסדרה הוא :

פתרון : $S=\frac{a_{50}+a_{51}}{2}\cdot 100=\frac{5.98+6.06}{2}\cdot 100=602$

שאלה 11

כאשר מחלקים $x^{17}+1$ ב- $x-1$ השארית היא :

פתרון : $x^{17}+1=x^{17}-1+2=(x-1)q(x)+2$ לכן השארית 2.

הערה : ניתן למצוא את השארית גם ע"י חלוקת פולינומים.

שאלה 12

הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{16^x-1}$ שווה ל :

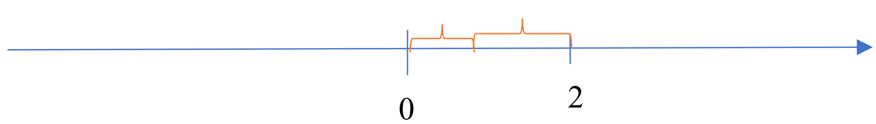
פתרון : $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{16^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{(4^x)^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{(4^x-1)(4^x+1)}=\frac{1}{2}$

שאלה 13

אוסף **כל** הפתרונות של אי השוויון הבא $|x-2|+|x|>2$ הוא :

פתרון :

דרך גרפית : למעשה אנחנו נדרשים למצוא את כל האיקסים שמרחקם מאפס ועוד מרחקם מ 2 גדול (ממש) מ 2. נשים לב (בשירטוט למטה) שעבור כל האיקסים שבתחום $[0,2]$ מתקיים שוויון ובתחום המשלים מתקיים אי השוויון. לכן $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ הוא הפתרון.



הערה : אפשר לפתור גם בדרך הרגילה ע"י פתיחת הערך המוחלט.

שאלה 14

סכום הפתרונות של המשוואה $\sin x + \cos 2x = 1$ כאשר $0 \le x \le \pi$ הוא :

פתרון :

$$\sin x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\sin x + (1 - 2sin^2 x) - 1 = 0$$

$$\sin x\,(1 - 2\sin x) = 0$$

עבור $sin\ x = 0$ $x=\pi$ וגם $x=0$

עבור $sin\ x = 0.5$ $x = \frac{\pi}{6}$ וגם $x = \frac{5\pi}{6}$ ולכן סכום הפתרונות הוא 2π

שאלה 15

סכום כל המספרים הדו ספרתיים שספרת היחידות שלהם היא 3 הוא :

פתרון :

הספרה הראשונה המקיימת תנאי זה היא 13 והאחרונה היא 93. אוסף המספרים המקיימים תנאי זה הוא סדרה חשבונית שבה ההפרש $d=10$ ולכן מספר הספרות הוא 9 וסכומם הוא 477

שאלה 16

עבור איזה מהמספרים הבאים מתקיים $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{-3}$:

פתרון :

ניתן להסתכל על הסכום באגף שמאל כסכום של סדרה הנדסית שבה $a_1=1$ ו- $q=x$ ולכן :

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1(1-x^6)}{1-x}$ ולכן השיוויון מתקיים עבור 4

שאלה 17

עבור איזה ערך של a הישרים הבאים ניצבים $x = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-2}$; $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{a} = \frac{z+5}{3}$:

פתרון :

על מנת שהישרים יהיו ניצבים נדרש שווקטורי הכיוון יהיו ניצבים כלומר מכפלתם הסקלרית תהיה אפס. לכן נדרש $a = \frac{1}{4}$

שאלה 18 :

מצאו את $sin(\alpha)$ כאשר α היא הזווית בין הווקטורים $\bar{u}$ ו- $\bar{v}$ המקיימים $|\bar{u}-\bar{v}|=1$
וגם $|\bar{v}|=2$ $|\bar{u}|=3$

פתרון :

$$1=|\bar{u}-\bar{v}|^2=(\bar{u}-\bar{v})(\bar{u}-\bar{v})=|\bar{u}|^2-2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\alpha+|\bar{v}|^2=9-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\alpha+4$$

לכן $cos(\alpha)=1$ ולכן $sin(\alpha)=0$

שאלה 19 :

המספר $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{18}$ הוא

פתרון :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=cos\frac{\pi}{6}+i\cdot sin\frac{\pi}{6}$$

לפי נוסחאת דה מואבר : $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{18}=cos\frac{18\pi}{6}+i\cdot sin\frac{18\pi}{6}=-1$

לכן מספר זה הוא ממשי שלילי

שאלה 20

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2-4}+e^{4-x^2}$ המוגדרת לכל מספר ממשי. אזי בהכרח :

פתרון : נשים לב כי הפונקציה זוגית וכי $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ כלומר הפונקציה לא חסומה מלמעלה. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$

מחקירה מהירה של הפונקציה נגלה ש : $f(x)\geq 2$ לכל x.

$$f'(x)=2xe^{x^2-4}-2xe^{4-x^2}=2x\left(e^{x^2-4}-e^{4-x^2}\right)=2x(e^{x^2-4}-\frac{1}{e^{x^2-4}})$$

הנגזרת מתאפסת עבור $x=0$; $x=\pm2$ ומתקיים: $f(-2)=f(2)=2$

$$f''(x)=2\left(e^{x^2-4}-e^{4-x^2}\right)+2x\cdot2x\cdot f(x)$$

מתקיים $f''(0)<0$ ולכן זהו מקסימום. $f''(-2)=f''(2)>0$ ולכן זהו מינימום.