

מבחן סיווג במתמטיקה 30.6.2020
פתרון

שאלה מס' 1

יהי $z \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים $iz \neq \bar{z}$. נסמן $w = (z + i\bar{z})^{12}$. מתקיים:

פתרון: נסמן $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ לכן

$$w = (z + i\bar{z})^{12} = (a + bi + i(a - bi))^{12} = ((a + b) + i(a + b))^{12}$$

לכן הארגומנט של $z + i\bar{z}$ הוא $\frac{\pi}{4} + \pi k$, לכן $\arg(w) = 12\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = 3\pi + 12\pi k = \pi$

שאלה מס' 2

נתונים המישור $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ והנקודות $A(k^2, 1, k)$ ו- $B(3, -k, -2)$. לאילו ערכי k הישר העובר דרך הנקודות A, B מוכל במישור הנתון.

פתרון א': כדי שהישר יהיה מוכל במישור, צריך לדרוש ששתי הנקודות A, B יקיימו את המשוואה של המישור. נציב תחילה את B

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot (-k) + 4 \cdot (-2) + 5 = 0 \Rightarrow 3 + 3k = 0 \Rightarrow k = -1$$

נציב ב- A : $A(1, 1, -1)$ ונבדוק האם זה מקיים את משוואת המישור:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 5 = 0$$

לכן עבור $k = -1$ שתי הנקודות נמצאות על המישור ולכן גם הישר שעובר דרך שתי הנקודות מוכל במישור.

פתרון ב': אם שתי הנקודות A, B נמצאות במישור אז הוקטור $\vec{AB} = (3 - k^2, -k - 1, -2 - k)$ ניצב לנורמל של המישור $(2, -3, 4)$, כלומר

$$(2, -3, 4) \cdot (3 - k^2, -k - 1, -2 - k) = 2(3 - k^2) - 3(-k - 1) + 4(-2 - k) = 0$$

$$-2k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} = -1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$

בנוסף, שתי הנקודות מוכלות במישור ורק עבור $k = -1$ נקבל ש- A, B מוכלות במישור.

שאלה מס' 3

נתון כי $|\vec{n}| = 1, |\vec{m}| = \sqrt{3}$ וכי הזווית בין הוקטורים $\vec{m}$ ו- $\vec{n}$ היא 30° .
נגדיר $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$. חשבו את שטח המשולש הנוצר על ידי הוקטורים $\vec{a}, \vec{b}$.

פתרון: שטח משולש שווה ל- $\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ כאשר α היא הזווית שבין $\vec{a}, \vec{b}$. נשתמש במכפלה סקלרית כדי למצוא את כל הנתונים.

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = |\vec{m}|^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2 = 3 - 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$|\vec{b}|^2 = (\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = |\vec{m}|^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2 = 3 + 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 7 \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{m} + \vec{n})}{1 \cdot \sqrt{7}} = \frac{|\vec{m}|^2 - |\vec{n}|^2}{\sqrt{7}} = \frac{3 - 1}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

לכן שטח משולש הוא:

$$\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

שאלה מס' 4

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(9x)}{1 - \cos(8x)}$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(9x)}{1 - \cos(8x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{9x}{2}\right)}{2 \sin^2(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{9x}{2}\right)}{\left(\frac{9x}{2}\right)^2} \cdot \frac{(4x)^2}{\sin^2(4x)} \cdot \frac{\left(\frac{9x}{2}\right)^2}{(4x)^2} = \frac{81}{64}$$

שאלה מס' 5

נתון ששורשי המשוואה הריבועית $x^2 - 5x + 3 = 0$ הם α, β . המשוואה ששורשיה הם $\alpha + 2\beta, \beta + 2\alpha$ היא:

פתרון: נשתמש בנוסחאות וייטה: מתקיים $\alpha + \beta = 5, \alpha \cdot \beta = 3$. לכן

$$\alpha + 2\beta + \beta + 2\alpha = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$(\alpha + 2\beta)(\beta + 2\alpha) = \alpha\beta + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 5\alpha\beta =$$

$$2((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 5\alpha\beta = 2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta = 53$$

לכן המשוואה המתאימה היא $x^2 - 15x + 53 = 0$.

שאלה מס' 6

מצאו את סכום פתרונות המשוואה $\log_4 [3(4^{x-1}) - \frac{1}{2}] = 2x - 1$.

פתרון: מתקיים $4^{2x-1} = 3(4^{x-1}) - \frac{1}{2}$.

נכפול ב-4 ונקבל $(4^x)^2 - 3(4^x) + 2 = 0$.

נציב $t = 4^x$ ונקבל משוואה ריבועית $t^2 - 3t + 2 = 0$, לכן $t_{1,2} = 2, 1$.

אם $t_1 = 1$ אז $4^x = 1$ ו- $x = 0$.

אם $t_1 = 2$ אז $4^x = 2$ ו- $x = \frac{1}{2}$. וסכום הוא $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

שאלה מס' 7

נתון אי השוויון הבא: $x^2 - 6|x + 1| - 1 \leq 0$.

מצאו את ההפרש בין המספר המינימלי והמקסימלי שמקיימים את אי השוויון.

פתרון: נפריד לשני מקרים: אם $x \geq 1$ אז

$$x^2 - 6(x + 1) - 1 = x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$$

בתחום הנתון $1 \leq x \leq 7$. אם $x < 1$ אז

$$x^2 + 6(x + 1) - 1 = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq -1$$

לכן המספר הגדול ביותר שמקיים את המשוואה הוא 7 והמספר הקטן ביותר שמקיים את המשוואה הוא -5 והמרחק ביניהם הוא 12.

שאלה מס' 8

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \log_{x^2-9}(2-x)$.

פתרון: א. $x < -3$

ב. $-3 < x < 3$

ג. $2 < x < 3$

ד. $x > 3$

ה. $-3 < x < 2$

שאלה מס' 9

המספרים $a, b, 4$ מהווים סדרה הנדסית יורדת $a \geq 4 \geq b$ והמספרים $a, 5, b$ מהווים סדרה חשבונית אז $\frac{a}{b}$ שווה:

פתרון: כיוון ש- $a, b, 4$ מהווים סדרה הנדסית מתקיים $\frac{4}{a} = \frac{b}{4}$.
כיוון ש- $a, 5, b$ מהווים סדרה חשבונית $5 - a = b - 5$, לכן $b = 10 - a$.
נציב במשוואה הראשונה ונקבל

$$ab = 16 \Rightarrow a(10 - a) = 10a - a^2 = 16 \Rightarrow a^2 - 10a + 16 = (a - 8)(a - 2) = 0$$

כלומר $a = 8$ או $a = 2$. כיוון שנתון $a \geq 4$ מתקיים ש- $a = 8$ ו- $b = 2$ ולכן $\frac{a}{b} = 4$.

שאלה מס' 10

מצאו את המקדם של x^{10} בפיתוח הביטוי $(x^2 + 1)^{10}(x + 1)$.

פתרון: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(x^2 + 1)^{10}(x + 1) = \left(\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (x^2)^i 1^{10-i} \right) (x + 1) = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} x^{2i+1} + \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} x^{2i}$$

במחבר הראשון כל החזקות הן אי זוגיות לכן המקדם של x^{10} הוא 0.
במחבר השני המקדם של x^{10} מתקבל עבור $k = 5$ והוא

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 252$$

שאלה מס' 11

נתון שהפולינום $p(x) = 3x^3 - 9x^2 + kx - 12$ מתחלק ב- $x - 3$ ללא שארית. איזה מהפולינום הבאים מחלק את $p(x)$ ללא שארית?

פתרון א': כיוון שהפולינום מתחלק ב- $x - 3$, מתקיים $p(3) = 0$, כלומר

$$p(3) = 3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 3k - 12 = 3k - 12 = 0 \Rightarrow k = 4$$

לכן

$$p(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4x - 12 = 3x^2(x - 3) + 4(x - 3) = (3x^2 + 4)(x - 3)$$

לכן $3x^2 + 4$ מחלק את $p(x)$.

פתרון ב': לאחר מציאת k כמו בפתרון א' מבצעים חלוקת פולינומים ב- $x - 3$ ומקבלים את $3x^2 + 4$.

שאלה מס' 12

נתון $p(x)$ פולינום כך שקבוצת הפתרונות של המשוואה $p(x) = 0$ היא $\{-2, 4\}$. מצאו את קבוצת הפתרונות של $p(x^2 + 3x) = 0$.

פתרון: כיוון שקבוצת הפתרונות של המשוואה $p(x) = 0$ היא $\{-2, 4\}$, מתקיים $p(-2) = 0$ וגם $p(4) = 0$.

לכן הפתרונות הדרושים מקיימים $x^2 + 3x = -2$ או $x^2 + 3x = 4$.

עבור $x^2 + 3x + 2 = 0$ נקבל את הפתרונות $-1, -2$.

עבור $x^2 + 3x - 4 = 0$ נקבל את הפתרונות $-4, 1$.

לכן קבוצת הפתרונות היא $\{-1, -2, 1, -4\}$.

שאלה מס' 13

מצאו את אוסף כל הפרמטרים k עבורם למשוואה $4 \sin x + 3 \cos x = k$ יש פתרון.

פתרון: נגדיר $f(x) = 4 \sin x + 3 \cos x - k$. נרצה למצוא את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה.

מתקיים $f'(x) = 4 \cos x - 3 \sin x = 0$, לכן $4 \cos x = 3 \sin x$, כלומר $\tan x = \frac{4}{3}$. עוזר למצוא את x .

ננסה בדרך אחרת:

$$16 \cos^2 x = 9 \sin^2 x = 9(1 - \cos^2 x) \Rightarrow 16 \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 25 \cos^2 x = 9$$

לכן $\cos^2 x = \frac{9}{25}$, כלומר בנקודות הקיצון מתקיים $\cos x = \pm \frac{3}{5}$ ו- $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \frac{4}{5}$.

עבור x המקיים $\cos x = \frac{3}{5}, \sin x = \frac{4}{5}$ מתקיים $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{25}{5} = 5$.

עבור x המקיים $\cos x = -\frac{3}{5}, \sin x = -\frac{4}{5}$ מתקיים $4 \cdot (-\frac{4}{5}) + 3 \cdot (-\frac{3}{5}) = -\frac{25}{5} = -5$.

לכן למשוואה קיים פתרון לכל k המקיים $-5 \leq k \leq 5$.

שאלה מס' 14

הנגזרת ה-2020 של $f(x) = e^{2x}$ בנקודה $x = 0$ שווה ל-

פתרון: נבדוק את הנגזרות הראשונות:

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad f''(x) = 2^2 e^{2x}, \dots, f^{(2020)}(x) = 2^{2020} e^{2x}$$

לכן הנגזרת ה-2020 של $f(x)$ בנקודה $x = 0$ היא $2^{2020} e^{2 \cdot 0} = 2^{2020}$.

שאלה מס' 15

מצאו את שטח המשולש ברביע הראשון הנוצר על ידי משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x}$ בנקודה $x = 3$ והצירים x ו- y .

פתרון: נמצא את הישר השמיק ל- $f(x)$. מתקיים $f'(x) = -\frac{6}{x^2}$ לכן $f'(3) = -\frac{6}{3^2} = -\frac{2}{3}$.

בנוסף, מתקיים $f(3) = \frac{6}{3} = 2$, לכן נקודת ההשקה היא $(3, 2)$,
לכן משוואת הישר היא $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$, כלומר $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
הישר חותך את הצירים בנקודות $(0, 4)$ וב- $(6, 0)$.
שטח המשולש שקודיו הם $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 4)$ הוא $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

שאלה מס' 16

חשבו:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \sin(4x) dx$$

פתרון:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \sin(4x) dx = \int_0^{\pi/4} \sin(2x) \cdot 2 \sin(2x) \cos(2x) dx =$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x) \cdot (2 \cos(2x)) dx = \left(\frac{\sin^3(2x)}{3} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}$$

שאלה מס' 17

תהא $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ נסמן $a = \frac{(1+e)^3}{e}$ אזי $(f^{-1})'(a)$ שווה:

פתרון: מתקיים ש- $a = \frac{(1+e)^3}{1+e-1} = f(1+e)$ לכן $\frac{1}{f'(1+e)} = (f^{-1})'(a)$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$$f'(1+e) = \frac{(1+e)^2(2(1+e)-3)}{(1+e-1)^2} = \frac{(1+e)^2(2e-1)}{e^2} \Rightarrow (f^{-1})'(a) = \frac{e^2}{(1+e)^2(2e-1)}$$

שאלה מס' 18

חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} - \sqrt{\frac{9}{x^4} - \frac{5}{x^2}} \right)$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} - \sqrt{\frac{9}{x^4} - \frac{5}{x^2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(3 - \sqrt{9 - 5x^2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{(3 - \sqrt{9 - 5x^2})(3 + \sqrt{9 - 5x^2})}{(3 + \sqrt{9 - 5x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{9 - (9 - 5x^2)}{(3 + \sqrt{9 - 5x^2})} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{5x^2}{(3 + \sqrt{9 - 5x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{(3 + \sqrt{9 - 5x^2})} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

שאלה מס' 19

תהא הפונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים לכל x ממשי המקיימת: $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(0) = -2$, $f''(1) = 5$.
נגדיר $g(x) = 3f(x) + x^2 + 5$ אזי:

פתרון: כיוון ש- $g'(x) = 3f'(x) + 2x$, מתקיים

$$g'(0) = 3f'(0) + 2 \cdot 0 = 0, \quad g'(1) = 3f'(1) + 2 \cdot 1 = 2$$

לכן $x = 1$ לא נקודת קיצון של הפונקציה.
כיוון ש- $g''(x) = 3f''(x) + 2$, מתקיים

$$g''(0) = 3f''(0) + 2 = 3 \cdot (-2) + 2 = -4 < 0$$

לכן $x = 0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(x)$.

שאלה מס' 20

תהא a_n סדרה הנדסית. נתון ש- $a_n > 0$, $a_1 \neq 1$ וגם $a_3 a_7 = 1$.
מצאו k שעבורו $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$.

פתרון: מתקיים $a_5 = a_1 q^4 = 1$ לכן $a_3 \cdot a_7 = a_1 q^2 \cdot a_1 \cdot q^6 = a_1^2 q^8 = 1$
באותו האופן אם ניקח $a_{5-m} \cdot a_{5+m} = a_5$ לכן בגלל הסימטריה, נבחר $k = 9$ ומתקיים

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_9 = (a_1 a_9) (a_2 a_8) (a_3 a_7) (a_4 a_6) a_5 = 1$$