

תשובות

תשובה מספר 1

נסמן ב- y את הצלע המשותפת לשני המשולשים שבסרטוט. במשולש ACD נקבל $\sin(70^\circ) = \cos(20^\circ) = \frac{y}{3}$, כלומר $y = 3 \cdot \cos(20^\circ)$.

במשולש ABC נקבל $\sin(20^\circ) = \frac{y}{x}$, כלומר $x = \frac{y}{\sin(20^\circ)} = \frac{3 \cdot \cos(20^\circ)}{\sin(20^\circ)}$.

תשובה מספר 2

כיוון ש- L מקביל ל- $y = 4x - 3$, שיפוע הישר L הוא 4. מצד שני, הישר $f'(x_0) = 2x_0 - 2 = 4$ מתקיים $(x_0, f(x_0))$ נקודת ההשקה $f(x)$ ולכן נקודת ההשקה היא $(3, 3)$, לכן משוואת הישר המשיק היא $y = 4(x - 3) + 3 = 4x - 9$. נמצא את נקודת החיתוך:

$$\frac{1}{2}x - 2 = 4x - 9 \Rightarrow x - 4 = 8x - 18 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2, y = -1$$

תשובה מספר 3

נשתמש בנוסחאות וייטה: מתקיים $\alpha + \beta = 5, \alpha \cdot \beta = 3$. לכן $\alpha + 2\beta + \beta + 2\alpha = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot 5 = 15$
 $(\alpha + 2\beta)(\beta + 2\alpha) = \alpha\beta + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 5\alpha\beta =$
 $2((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 5\alpha\beta = 2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta = 53$
לכן המשוואה המתאימה היא: $x^2 - 15x + 53 = 0$

תשובה מספר 4

איבר השייך לקבוצה A שייך בהכרח גם לקבוצה B , ולכן לא ייתכן שהוא שייך לקבוצה C (כי כל איבר השייך לקבוצה C אינו שייך לקבוצה B). מכאן שהתשובה הנכונה היא א.

תשובה מספר 5

נפתור את אי השוויון: נעלה בריבוע: $10 - x < (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
 כלומר $0 < (x - 6)(x - 1) = x^2 - 7x + 6$. לכן $x > 6$ או $x < 1$.
 מצד שני, x צריך לקיים $10 - x \geq 0$ כלומר $x \leq 10$.
 וגם כיוון ש- $x - 4 < \sqrt{10 - x} \leq 0$ צריך להתקיים $x - 4 > 0$, כלומר $x > 4$.
 לכן המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון הם: 7, 8, 9, 10, וסכומם הוא: 34.

תשובה מספר 6

מתקיים

$$a = i^{2023} (z - \bar{z}) (w - \bar{w}) = i^{2023} 2i \operatorname{Im}(w) = 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) i^{2025} = 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) i$$

מכאן ש- a כולל רק רכיב מדומה מאחר שהמספרים הנתונים אינם ממשיים, $\operatorname{Im}(w)$ ו- $\operatorname{Im}(z)$ בהכרח שווים מאפס, והאפשרות היחידה שנותרת היא שתוצאת הביטוי הינה מספר מדומה טהור.

תשובה מספר 7

כיוון שהישר העובר דרך שתי הנקודות מקביל למישור,
 הוקטור $\overrightarrow{AB} = (3 - k^2, -k - 1, -2 - k)$ ניצב לנורמל של המישור $(2, -3, 4)$,
 כלומר

$$(2, -3, 4) \cdot (3 - k^2, -k - 1, -2 - k) = 2(3 - k^2) - 3(-k - 1) + 4(-2 - k) = 0$$

$$-2k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} = -1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$
 בנוסף, שתי הנקודות לא נמצאות על המישור וזה מתקיים עבור $k = \frac{1}{2}$ בלבד.

תשובה מספר 8

דרך א: לאחר חלוקת פולינומים נקבל

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + bx + a = (x^3 + 3x^2 + x + b + 1)(x - 1) + a + b + 1$$

לכן השארית בחלוקה ב- $x - 1$ היא $a + b + 1 = 15$ ולכן $a + b = 14$.
 דרך ב: השארית בחלוקה ב- $x - 1$ מתקבלת מהצבה של 1 בפולינום, כלומר
 $p(1) = 1 + 2 - 2 + b + a = 1 + b + a = 15$

ולכן $a + b = 14$.

תשובה מספר 9

מחשבון וקטורים נקבל: $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$
 $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$ $\overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
 ולכן, $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF} = 0$

תשובה מספר 10

נשתמש בנוסחה לשינוי בסיס בשני האגפים.

באגף שמאל:

$$\log_3(\log_9 x) = \frac{\log_9(\log_9 x)}{\log_9 3} = \frac{\log_9(\log_9 x)}{\frac{1}{2}} = \log_9((\log_9 x)^2)$$

באגף ימין:

$$\log_9(\log_3 x) = \log_9\left(\frac{\log_9 x}{\log_9(3)}\right) = \log_9\left(\frac{\log_9 x}{\frac{1}{2}}\right) = \log_9(2 \log_9 x)$$

נשווה ונקבל כי

$$\log_9((\log_9 x)^2) = \log_9(2 \log_9 x)$$

כיוון ש- $\log_9 t$ היא פונקציה חח"ע נקבל כי

$$(\log_9 x)^2 = 2 \log_9 x \Rightarrow \log_9 x (\log_9 x - 2) = 0$$

אם $\log_9 x = 0$ כלומר $x = 1$ בסתירה לנתון.

אחרת $\log_9 x = 2$ כלומר $x = 9^2 = 81$ ולכן $\sqrt{x} = 9$.

תשובה מספר 11

הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי בנקודות בהן $f'(x) = 0$

מתקיים $f'(x) = 2\cos x + \sqrt{5} \sin x = 0$ נדרוש

נעלה את המשוואה בריבוע: $4\cos^2 x = 5\sin^2 x = 5(1 - \cos^2 x) = 5 - 5\cos^2 x$

לכן בנקודות הקיצון של הפונקציה מתקיים: $\cos^2 x = \frac{5}{9}$, $\sin^2 x = \frac{4}{9}$

כלומר, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin x = \pm \frac{2}{3}$

הערך המקסימלי של הפונקציה מתקבל כאשר $\sin x > 0$ ו- $\cos x < 0$

והוא שווה ל- $2 \cdot \frac{2}{3} - \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$

תשובה מספר 12

נכתוב את הפונקציה בצורה מפורטת:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1 & x \geq 1 \\ 3x^2 - x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

נחפש נקודות קיצון בתחום $[0, 2]$. יש שלושה סוגים של מועמדים לקיצון.

1. קצוות הקטע: $x = 0$, $x = 2$

2. נקודות בהן הפונקציה לא גזירה: $x = 1$

3. נקודות בהן הנגזרת מתאפסת: בקטע $(1, 2)$ $f'(x) = 6x - 1 = 0$ עבור $x = \frac{1}{6}$: לא בתחום.

בקטע $(0, 1)$ $f'(x) = 6x + 1 = 0$ עבור $x = -\frac{1}{6}$: לא בתחום

נציב את 3 המועמדות ונקבל:

$$f(0) = -1, f(1) = 3, f(2) = 11$$

לכן המינימום הגלובלי הוא -1 והמקסימום הגלובלי הוא 11 וההפרש ביניהם הוא 12.

תשובה מספר 13

מתקיים $\int_0^1 (8xa_n) dx = 4xa_n \int_0^1 4a_n$, וכיוון שהפונקציה $\sin^3 x$ אי-זוגית

מתקיים $\int_{-a_n}^{a_n} (\sin^3 x) dx = 0$, לכן $a_{n+1} = 4a_n$ וזו סדרה הנדסית בה

$$a_{500} = a_1 q^{500-1} = 4^{499} = 2^{998} \quad \text{מכאן: } a_1 = 1, q = 4$$

תשובה מספר 14

מתקיים: $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$$

על פי הנתון: $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v} + \vec{w}|^2$, לכן

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{v}, \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\vec{v} \cdot \vec{w} = 2\vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{מכאן}$$

תשובה מספר 15

על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים

$$\left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{3k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{3k} (-3)^{15-k} x^{3k-30+2k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} (-3)^{15-k} x^{5k-30}$$

מחפשים מקדם של x^0 , כלומר $k = 6$. במקרה זה המקדם הוא $\binom{15}{6} (-3)^9$

תשובה מספר 16

מהגדרת סדרה הנדסית: $a_3 = a_2q$, $a_4 = a_2q^2$

נניח ש- $a_2, a_4 < 0$:

אם $q > 0$ אז מהנתון ש- $a_3 < a_2$ מתקיים $a_4 = a_3q < a_2q < a_3$ בסתירה לנתון.

אם $q < 0$ אז $a_2 > 0 > a_3 = a_2 \cdot q$, בסתירה לנתון.

לכן נקבל $a_2, a_4 > 0$.

אם $q > 0$ אז $a_4 = a_3q < a_2q = a_3$, בסתירה לנתון.

לכן $q < 0$ ומתקיים: $a_2 = a_1q > 0$ ו- $q < 0$ אז $a_1 < 0$, ומכאן $a_1 \cdot a_2 < 0$

תשובה מספר 17

נעבור לייצוג טריגונומטרי: $z = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, לכן $|w| = 2|z| = 2 \cdot 2 = 4$.

נסמן $w = 2\text{cis}\theta$. בנוסף, $1 - i = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. מתקיים:

$$\arg\left(\frac{zw}{1-i}\right) = \arg z + \arg w - \arg(1-i) = \frac{\pi}{6} + \theta - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$w = 4\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i \quad \text{ולכן}$$

תשובה מספר 18

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

כיוון שהמחזור של $\tan$ הוא π נקבל כי $\beta = \frac{\alpha}{2} + \pi k$, כלומר $2\beta = \alpha + 2\pi k$.

תשובה מספר 19

ננסה להוכיח את הטענה באינדוקציה על n :

בדיקה עבור $n = 1$ מתקיים: $2 + 3 = 2 + 4 - 1$ ולכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה.

צ"ל:

$$2(2n + 1) + (2n + 3) + \dots + (3n) + (3n + 1) + (3n + 2) + 3(n + 1) = 2(n + 1)^2 + 4(n + 1) - 1$$

על פי הנחת האינדוקציה:

$$(2n) + (2n + 1) + (2n + 2) + \dots + (3n) + (3n + 1) + (3n + 2) + (3n + 3) - (2n) - (2n + 1) =$$

$$2n^2 + 4n - 1 + (3n + 1) + (3n + 2) + (3n + 3) - (2n) - (2n + 1) = 2n^2 + 9n + 4$$

מצד שני,

$$2(2n + 1)^2 + 4(n + 1) - 1 = 2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4 - 1 = 2n^2 + 8n + 5$$

מתקיים ששני האגפים שווים אם

$$2n^2 + 9n + 4 = 2n^2 + 8n + 5 \Rightarrow n = 1$$

ולכן הטענה נכונה רק עבור $n = 1$ (לפי שלב הבדיקה) ועבור $n + 1 = 2$ (רק במקרה זה עבור $n = 1$ יש שוויון בצעד

האינדוקציה). בשאר המקרים לא נקבל שוויון.

לכן מתוך האפשרויות המוצעות ההיגד הנכון הוא:

קיים מספר סופי של מספרים טבעיים n עבורם הטענה נכונה, אבל לא מתקיים צעד האינדוקציה, כלומר לא מתקיים:

אם הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו אז היא גם נכונה עבור $n + 1$.

תשובה מספר 20

נגדיר $g(x) = f(x) \cos x$. מתקיים

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - f(0) \cos 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - f(0)}{x}$$

$$g'(0) = f'(0) \cos 0 + f'(0)(-\sin 0) = f'(0) = 1$$

מצד שני, ולכן הגבול הוא 1.

תשובה מספר 21

נשתמש באינטגרציה בחלקים: $u = x \Rightarrow u' = 1$, $u' = \cos x \Rightarrow u = \sin x$

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

תשובה מספר 22

מתקיים $F_n(x) = 8^n e^{8^n}$ ולכן $F_6(1) = 8^6 e^8 = 2^{18} e^8$.

נגזור ונמצא חוקיות של $G_n(x)$:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = ((1+x)^{-1})' = -(1+x)^{-2}$$

$$((1+x)^{-1})'' - ((1+x)^{-2})' = 2(1+x)^{-3}$$

באופן כללי $G_n(x) = ((1+x)^{-1})^{(n)} = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)}$ ולכן

$$G_{17}(1)F_6(1) = \frac{(-1)^{17} 17!}{2^{18}} \cdot 2^{18} e^8 = -17! e^8 \quad \text{ולכן} \quad G_{17}(1) = \frac{(-1)^{17} 17!}{2^{18}}$$

תשובה מספר 23

נתייחס לכל טענה בנפרד:

(א) אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש אז $(f \circ f)(x)$ מונוטונית עולה ממש.

הטענה נכונה: אם f מונוטונית עולה, אז לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$

ולכן $(f \circ f)(x_1) = f(f(x_1)) < f(f(x_2)) = (f \circ f)(x_2)$ ולכן $f \circ f$ מונוטונית עולה ממש.

(ב) אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית יורדת ממש אז $(f \circ f)(x)$ מונוטונית יורדת ממש.

הטענה לא נכונה: ניקח למשל $f(x) = -x$. זו פונקציה מונוטונית יורדת ממש ו- $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = x$

שהיא פונקציה מונוטונית עולה ממש.

(ג) אם $f(x)$ הפיכה ומונוטונית עולה ממש אז $f^{-1}(x)$ מונוטונית יורדת ממש.

הטענה לא נכונה: ניקח למשל $f(x) = x$ מונוטונית עולה ממש. $f^{-1}(x) = x$ שהיא גם פונקציה מונוטונית עולה ממש.

(ד) אם $f(x)$ מונוטונית עולה ממש אז $f(x)$ היא פונקציה על.

הטענה לא נכונה: ניקח למשל $f(x) = e^x$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש אבל היא לא על ב- $\mathbb{R}$.

דוגמה נגדית נוספת: $f(x) = \arctan x$.

תשובה מספר 24

נתון כי $3^{2x} - 3^x \cdot 5^x \geq 6 \cdot 5^{2x}$

נחלק ב- 5^{2x} (שבהכרח חיובי) ונקבל

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq 6$$

נסמן $f = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ ונקבל $t^2 - t - 6 \geq 0$, כלומר $t \geq 3$ או $t \leq -2$.

t חיובי, לכן בהכרח $t \geq 3$, כלומר $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq 3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log\left(\frac{3}{5}\right)^3}$

הפונקציה $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ יורדת, לכן

$$x \leq \log\left(\frac{3}{5}\right)3 = \frac{\log_3 3}{\log_3\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3 - \log_3 5} = \frac{1}{1 - \log_3 5}$$

תשובה מספר 25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 6x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 6x})(x - \sqrt{x^2 + 6x})}{x - \sqrt{x^2 + 6x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 6x)}{x - \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x}{x - \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-6x}{x}}{\frac{x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{1 - \frac{|x|}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}}}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{1 - (-1)\sqrt{1 + \frac{6}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{1 + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}} \stackrel{(**)}{=} -3$$

הסבר ל-(*): כיוון שאנחנו בודקים גבול ב- ∞ נוכל להסיק ש- $x < 0$ ולכן $|x| = -x$ ולכן $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$.

הסבר ל-(**): המונה קבוע -6. על פי אריתמטיקה של גבולות המכנה שואף ל-2. ולכן על פי אריתמטיקה של גבולות

$$\text{נקבל: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 6x}) = -3$$

בנוסף, לכל $x < -6$ מתקיים כי $0 < \frac{6}{x} < 1$ ולכן המכנה מקיים: $1 < 1 + \sqrt{1 + \frac{6}{x}} < 2$

$$\text{לכן } \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}} > \frac{1}{2}$$

$$(x + \sqrt{x^2 + 6x}) = \frac{-6}{1 + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}} < \frac{-6}{2} = -3$$

ולכן הפונקציה חסומה על ידי -3 לכל $x \in (-\infty, -6)$