מבחן סיווג במתמטיקה 18.03.2018

מס' סטודנט: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ פקולטה: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות.
לא תיבדק הדרך, והציון על כל שאלה יהיה 5 נקודות או 0.
סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

	ניקוד
שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
שאלה 14	
שאלה 15	
שאלה 16	
שאלה 17	
שאלה 18	
שאלה 19	
שאלה 20	
סה"כ	

שאלה מס' 1

נתון $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \boxed{2}$$

פתרון: יש לשים לב ש־ $z_2 = \overline{z_1}$

שאלה מס' 2

מיצאו x שעבורו $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

$$x = \boxed{2}$$

פתרון: אפשר לנחש ואפשר לפתור משוואה ריבועית.

שאלה מס' 3

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \cos(x)e^{\sin x}$ ו־$f(0) = 8$.

$$f(x) = \boxed{e^{\sin x} + 7}$$

פתרון: ביצוע אינטגרציה.

שאלה מס' 4

תנו דוגמה לפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ שמקיימות
$lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ **וגם** $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$ **וגם** $\lim_{x\to 2} f(x)g(x) = 5$.
כתבו כל אחת מן הפונקציות בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{\frac{5}{(x-2)^2}}$$

$$g(x) = \boxed{(x-2)^2}$$

פתרון:
יש לשים לב שיתכנו פתרונות נוספים.
כמו כן, אם המונה של $f(x)$ חיובי (למשל קבוע כמו בדוגמא זו) והמכנה חיובי כאשר $x > 2$ ושלילי כאשר $x < 2$ אז הגבול בנקודה 2 לא קיים. מימין הפונקציה תשאף לאינסוף ומשמאל למינוס אינסוף.

שאלה מס' 5

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $a_1 = \sqrt[3]{2}(\cos(40°) + i\sin(40°))$ והמנה שלה היא $q = \cos(120°) + i\sin(120°)$. אזי:

$$|a_1|^3 + |a_2|^3 + |a_3|^3 = \boxed{6}$$

פתרון:

$$|a_1|^3 + |a_2|^3 + |a_3|^3 = |a_1|^3 + |a_1 q|^3 + |a_1 q^2|^3 = |a_1|^3(1 + |q|^3 + (|q|^3)^2)$$

לפי דה מואבר מתקיים $q^3 = \cos(3\cdot 120°) + i\sin(3\cdot 120°) = 1$

וגם $a_1^3 = (\sqrt[3]{2})^3(\cos(3\cdot 40°) + i\sin(3\cdot 40°)) = 2(\cos(120°) + i\sin(120°))$ ולכן $|a_1|^3 = |a_1|^3 = 2$

שאלה מס' 6

חשבו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x - 1}{9^x - 1} = \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{(3^x-1)(3^x+1)} = \frac{1}{2}}$$

שאלה מס' 7

תהא $f(x) = (1 + x^2)^{18}$. מהו המקדם של x^{10} בפולינום שהוא הנגזרת $f'(x)$?

$$a_{10} = \boxed{0}$$

שאלה מס' 8

כתבו את קבוצת ה־x־ים שמקיימים את אי השוויון $|x - 2| - |x + 4| > 2$ כאיחוד של קטעים, ייתכן אינסופיים.

$$\boxed{(-\infty, -2)} \cup \boxed{*}$$

.

שאלה מס' 9

יהא $\vec{v} = (1, 0)$

מצאו וקטורים $\vec{u}, \vec{w}$ בעלי אותו אורך כמו $\vec{v}$ המקיימים $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (0, 0)$

$$\vec{u} = \boxed{(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$\vec{w} = \boxed{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})}$$

שאלה מס' 10

תנו דוגמה (בנוסחה אחת) לפונקציה $f(x)$ **שחסומה ורציפה** בקרן $(0,\infty)$ ולא מקבלת שם מקסימום.

$$f(x) = \boxed{\arctan x}$$

פתרון:
יש לשים לב שיתכנו פתרונות נוספים.

שאלה מס' 11

כתבו פולינום ממעלה 4 שמתאפס בנקודות $3,4$ וב־ $2i$ וערכו בנקודה 0 הוא 1

$$p(x) = \boxed{\frac{1}{48}(x-3)(x-4)(x^2+4)}$$

פתרון:
פתרון זה מתאים אם נדרש שהפולינום יהיה עם מקדמים ממשיים. במקרה כזה אם מספר מרוכב הוא שורש אז גם הצמוד שלו הוא שורש ואז מתקבל הגורם האחרון בפולינום.

התקבלו גם פתרונות אחרים בהם המקדמים לאו דווקא ממשיים.

שאלה מס' 12

נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{1}{x} - \sqrt{x}$ המוגדרת בתחום $(0,\infty)$.
מצאו את הנקודות שבהן הפונקציה מקבלת מקסימום ומינימום. אם אין מקסימום או מינימום כנדרש רשמו במסגרת המתאימה "אין מקסימום" או "אין מינימום".

$$x_{max} = \boxed{\sqrt[3]{4}}$$

$x_{min} =$ "אין מינימום"

פתרון: חקירת פונקציה.

שאלה מס' 13

תהא $f(x) = \ln(\arcsin(x^2-1))$. מהי הפונקציה ההפוכה לה?

$$f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt{\sin(e^x)+1}}$$

שאלה מס' 14

נתון $a = \log_{10} 2$. הביעו את $\log_{10} 25$ באמצעות a.
(נדרש ביטוי אלגברי שאינו מכיל לוגריתמים).

$$\log_{10} 25 = \boxed{\log_{10} 5^2 = 2\log_{10}\tfrac{10}{2} = 2(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 2(1-a)}$$

שאלה מס' 15

נסמן $A_n = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n$. חשבו את A_n עבור $n = 3k$ כאשר k טבעי.

$$A_{3k} = \boxed{2}$$

פתרון: מתקיים,

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = cis(120^\circ)$$

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = cis(240^\circ)$$

לכן, $A_{3k} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{3k} + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^{3k} = cis(3k\cdot 120^\circ) + cis(3k\cdot 240^\circ) = 2$

שאלה מס' 16

סדרה a_n מקיימת: $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 1$. כתבו נוסחה מפורשת ל-a_n.

$$a_n = \boxed{\tfrac{3^n-1}{2}}$$

פתרון:

$$a_n = 3a_{n-1} + 1 = 3(3a_{n-2} + 1) + 1 = 3^2 a_{n-2} + 3 + 1 = 3^2(3a_{n-3} + 1) + 3 + 1 =$$

$$= 3^3 a_{n-3} + 3^2 + 3^1 + 3^0 = \cdots = 3^{n-1}\cdot 1 + \Sigma_{k=0}^{n-2} 3^k = \Sigma_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2}$$

שאלה מס' 17

פתחו סוגריים וצמצמו את הבטוי הבא.

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\dots(x^{2^k}+1)$$

$$\boxed{x^{2^{k+1}} - 1}$$

שאלה מס' 18

תהא $a_1, a_2, \ldots a_n$ סדרה חשבונית בעלת n איברים.

נתון כי $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots b_{n-1}, a_n$ היא סדרה חשבונית בעלת $2n-1$ איברים.
בטאו בעזרת n את היחס בין סכום האברים מהצורה a_k לסכום האברים מהצורה b_k בסדרה הנ"ל.

$$\boxed{\frac{n}{n-1}}$$

פתרון:
נסמן את הפרש הסדרה a_k ע"י d.
על מנת שהסדרה החדשה תהיה חשבונית נדרש: $b_1 = a_1 + \frac{d}{2}$ והפרש הסדרה הוא גם d.
כמו כן, יש n איברים בסכום הסדרה a_k ו־ $n-1$ איברים בסכום הסדרה b_k.
כעת נשתמש בנוסחאות לסכום סדרה חשבונית לכל אחת מהן.

שאלה מס' 19

נתון ישר במרחב $l : \overline{x} = (5,0,2) + t(1,-2,0)$.
נסמן ב־π את המישור המכיל את הישר ואת ראשית הצירים. מעגל ב־π משיק לישר ומרכזו בראשית הצירים. מצאו את רדיוס המעגל.

$$radius = \boxed{2\sqrt{6}}$$

פתרון:
נקודת ההשקה היא $(5+t,-2t,2)$. כמו כן, וקטור היוצא ממרכז המעגל לנקודת ההשקה מאונך לכיוון הישר ולכן: $(5+t,-2t,2)(1,-2,0) = 0$. נקבל, $t = -1$ ונחשב את מרחק נקודת ההשקה מראשית הצירים.

שאלה מס' 20

תלמיד טען שהוא יכול להוכיח באינדוקציה שלכל הסוסים אותו צבע.

הוכחה:
בסיס: עבור סוס אחד הטענה נכונה.
נוכיח שאם ל־ $n-1$ סוסים יש אותו צבע אז זה נכון ל־ n סוסים.
הוכחה:
נתונים n הסוסים $h_1, h_2, \ldots, h_n$
ע"פ הנחת האינדוקציה, ל־ $n-1$ הסוסים $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ אותו צבע וגם ל־ $n-1$ הסוסים $h_2, \ldots, h_n$ אותו צבע.
מסקנה: לכל הסוסים יש אותו צבע.

האם הוא צדק? אם לא, מהי הטעות שלו?

כדי שאפשר יהיה להסיק שלכל הסוסים אותו צבע, מוכרח להיות סוס משותף לקבוצת הסוסים מלבד הסוסים שהוצאו. הכישלון הוא במעבר מ־ $n=1$ ל־ $n=2$ ההנחה שהתכונה מתקיימת עבור $n=1$ אינה גוררת שהטענה תתקיים עבור $n=2$.