

שאלה מס' 1

חשבו:

$$\sin(2 \arccos(\frac{1}{3})) = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

פתרון:

$$\sin\left(2 \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2 \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

הערה: משתמשים כאן בכך ש- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

שאלה מס' 2

תנו דוגמה (בנוסחה אחת) לפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חח"ע ולא על. (תזכורת: $\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים)

$$f(n) = \boxed{2n}$$

פתרון:

נגדיר למשל: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ על ידי $f(n) = 2n$.

זו פונקציה חח"ע כי אם $f(n_1) = f(n_2)$, כלומר $2n_1 = 2n_2$ אז $n_1 = n_2$.
 f לא על כי לא קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = 3$.

הערה: קיימות אפשרויות רבות

שאלה מס' 3

תנו דוגמה לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שמקיימות

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 2 \quad \text{וגם} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \quad \text{וגם} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

כתבו כל אחת מן הפונקציות בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{2(x-1)}$$

$$g(x) = \boxed{(x-1)}$$

פתרון:

נגדיר למשל: $f(x) = 2(x-1)$ ו- $g(x) = x-1$

מתקיים: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x-1) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ אבל

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$$

הערה: קיימות אפשרויות נוספות לפתרון

שאלה מס' 4

מצאו את כל המספרים הממשיים המקיימים: $|x|^2 + |x - 1|^2 \leq 1$

$$0 \leq x \leq 1$$

פתרון:

לפתור את אי השוויון $|x|^2 + |x - 1|^2 \leq 1$ זה כמו לפתור את אי השוויון $x^2 + (x - 1)^2 \leq 1$, כלומר $x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1 \leq 1$ וזה אם ורק אם $2x(x - 1) \leq 0$, כלומר $0 \leq x \leq 1$.

שאלה מס' 5

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \tan(x)$ ו- $f(\frac{\pi}{4}) = 3$.

$$f(x) = -\ln |\cos x| + 3 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

פתרון:

נתון $f'(x) = \tan x$ ולכן

$$f(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$$

כיון ש- $f(\frac{\pi}{4}) = 3$ אז $-\ln |\cos \frac{\pi}{4}| + C = 3$ ולכן $C = 3 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$.

שאלה מס' 6

תנו דוגמא לפונקציה זוגית $f(x)$ לא קבועה המקבלת מקסימום מקומי ב- $x = 2$. כתבו את הפונקציה בנוסחה אחת.

$$f(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$$

פתרון:

f זוגית ולכן $f(-x) = f(x)$.

נתון זוגית ומקבלת מקסימום מקומי ב- $x = 2$ כלומר יש ל- $f(x)$ מקסימום מקומי גם ב- $x = -2$. נקח למשל פונקציה גזירה שיש לה נקודת מינימום מקומי ב- $x = 0$, לכן $f'(x) = -x(x - 2)(x + 2) = -x^3 + 4x$ ו- $f(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$.
הערה: קיימות אפשרויות נוספות לפתרון

שאלה מס' 7

חשבו:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - 1}{5h} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

פתרון:

נגדיר $f(x) = \tan x$ מתקיים:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x_0 + h) - \tan(x_0)}{h} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

נקח $x_0 = \frac{\pi}{4}$ מתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - 1}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{5} \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

שאלה מס' 8

תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ שתחום הגדרתה הוא: $[-1, 2] \cup [5, 8]$.

$$f(x) = \boxed{\sqrt{-(x+1)(x-2)(x-5)(x-8)}}$$

פתרון:

נסתכל על $f(x) = \sqrt{-(x+1)(x-2)(x-5)(x-8)}$ הפולינום שבתוך השורש הוא אי שלילי בתחום $[-1, 2] \cup [5, 8]$.

שאלה מס' 9

מצאו את נקודת החיתוך בין הישר $\ell: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 2, 3)$ והמישור $x + 2y - z = 5$.

$$\boxed{(3, 4, 6)}$$

פתרון:

נציב את משוואת הישר $\ell: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 2, 3) = (1+t, 2t, 3t)$ במשוואת המישור $x + 2y - z = 5$ ונקבל:

$$5 = 1 + t + 2 \cdot 2t - 3t = 1 + 2t \Rightarrow t = 2$$

ולכן נקודת החיתוך היא $(3, 4, 6)$.

שאלה מס' 10

מצאו מספר ממשי $0 < x < \frac{\pi}{2}$ כך שמתקיים $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

$$x = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

פתרון:

מתקיים $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ ולכן

$$\sin^2 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$$

נסמן $\sin^2 x = t$ ונקבל את המשוואה $4t^2 - 5t + 1 = 0$ לכן $t = \frac{1}{4}$ או $t = 1$.
 כלומר $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ או $\sin^2 x = 1$.
 כיוון ש- $0 < x < \frac{\pi}{2}$ נבחר ב- $\sin x = \frac{1}{2}$ לכן $x = \frac{\pi}{6}$.

שאלה מס' 11

רשמו את השארית בחלוקת הפולינומים: $p(x) = 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ בפולינומים $q(x) = x^2 - x + 1$

$$r(x) = \boxed{4x - 4}$$

פתרון:

$$\begin{array}{r} (3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1) : (x^2 - x + 1) = 3x^2 + 6x + 5 + \frac{4x - 4}{x^2 - x + 1} \\ \underline{-3x^4 + 3x^3 - 3x^2} \\ 6x^3 - x^2 + 5x \\ \underline{-6x^3 + 6x^2 - 6x} \\ 5x^2 - x + 1 \\ \underline{-5x^2 + 5x - 5} \\ 4x - 4 \end{array}$$

למעשה: $p(x) = q(x) \cdot (3x^2 + 6x + 5) + (4x - 4)$

שאלה מס' 12

תנו דוגמא למספר ממשי x שעבורו $\log_{15}(x^3 + x^2 + x + 1) + \log_{15}(x - 1) = 1$

$$x = \boxed{2}$$

פתרון:

$$1 = \log_{15}(x^3 + x^2 + x + 1) + \log_{15}(x - 1) = \log_{15}(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = \log_{15}(x^4 - 1)$$

לכן

$$x^4 - 1 = 15 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = 2$$

שאלה מס' 13

נתונה הפונקציה: $f : [0.5, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$

חשבו:

$$(f^{-1})'(2) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

פתרון:

נמצא תחילה את המקור של $y = 2$
 $2 = f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1} \Rightarrow 4 = x^2 + 4x - 1 \Rightarrow x = 1$
 הערה: למשוואה הריבועית יש עוד פיתרון שלא נמצא בתחום ההגדרה.

קבלנו ש- $f(1) = 2$ לכן $(f^{-1})'(2) = 1$ מתקיים:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

נמצא את $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{2}{3}$$

שאלה מס' 14

חשבו את סכום המספרים הטבעיים $60 \leq n \leq 500$ המסתיימים בסיפרה 1

$$S = \boxed{12144}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} a_1 &= 61; & d &= 10 & a_n &= 491 & \text{נגדיר סדרה חשבונית:} \\ 491 &= a_n = a_1 + d(n-1) = 61 + 10(n-1) \Rightarrow n = 44 \\ S &= \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(61+491)44}{2} = 12144 \end{aligned}$$

שאלה מס' 15

נתון ש- x_2, x_1 הם שורשי הפולינום $p(x) = x^2 + 7x + 1$
 מצאו פולינום $q(x) = ax^2 + bx + c$ כך ש- $\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}$ הם שורשים שלו

$$q(x) = \boxed{x^2 + 7x + 1}$$

פתרון:

מתקיים $p(x) = x^2 + 7x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ לכן $x_1 + x_2 = -7$ ו- $x_1x_2 = 1$
 הערה: אפשר גם בעזרת וייטה
 כמו כן, $q(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = a\left(x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1x_2}\right)$
 לכן, $q(x) = x^2 + 7x + 1$.

שאלה מס' 16

נתון ש- $\frac{1}{a} + a = 1$
חשבו:

$$\frac{1}{a^3} + a^3 = \boxed{-2}$$

רמז: ניתן להשתמש בנוסחת הבינום עבור: $(\frac{1}{a} + a)^3$

פתרון:

$$1 = \left(\frac{1}{a} + a\right)^3 = \frac{1}{a^3} + 3\frac{1}{a^2}a + 3\frac{1}{a}a^2 + a^3 = \frac{1}{a^3} + a^3 + 3\left(\frac{1}{a} + a\right)$$

ע"י העברת אגפים נקבל את התוצאה.

שאלה מס' 17

נתון שבפיתוח נוסחת הבינום של $(1+a)^n$ המקדמים של a, a^2, a^3 מהווים סדרה חשבונית. מצאו את n

$$n = \boxed{7}$$

פתרון: לפי נוסחת הבינום של ניוטון. $(1+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k$

לכן $a_1 = \binom{n}{1}; a_2 = \binom{n}{2}; a_3 = \binom{n}{3}$

בסדרה חשבונית מתקיים $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

לכן $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$

ע"י פתרון המשוואה נקבל את התוצאה.

שאלה מס' 18

מצאו נקודת מקסימום מקומי של הפונקציה $f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + 1)$ בתחום הגדרתה.

$$\boxed{(-2, \ln 5)}$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^3 + 3x^2 + 1)} \cdot (3x^2 + 6x)$$

מהשוואת הנגזרת לאפס נקבל $x = 0$ או $x = -2$ שניהם בתחום ההגדרה.

בעזרת הנגזרת השניה או ע"י בדיקת תחומי עליה וירידה בעזרת הנגזרת הראשונה נמצא ש- $x = -2$ היא נקודת מקסימום מקומי.

שאלה מס' 19

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים האיבר הראשון הוא $1 + i$ והאיבר השני הוא 2. חשבו את האיבר העשירי.

$$a_{10} = \boxed{32}$$

פתרון:

מתקיים: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1+i} = 1 - i$ ולכן: $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot (1 - i)^8$
מתקיים $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{4} \right)$ לכן לפי כלל דה מואבר

$$a_{10} = 2 \cdot (1 - i)^8 = 2 \cdot (\sqrt{2})^8 \cdot \operatorname{cis} \left(8 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) = 32$$

שאלה מס' 20

יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ וקטורים כך שמתקיים $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$. נתון שוקטורים $\vec{u} - 2\vec{v}$ ו- $\vec{u} + \vec{v}$ ניצבים. חשבו את $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boxed{-14}$$

פתרון:

המכפלה הסקלרית של וקטורים ניצבים היא אפס ולכן מתקיים:

$$0 = (\vec{u} - 2\vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{v}|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}|^2 = -14 \quad \text{לכן}$$