

מבחן סיווג במתמטיקה 22.8.24 - פתרון

1. יהי $\alpha \in [0, \pi]$ ותהי a_n סדרה הנדסית אינסופית המקיימת:
האיבר הראשון של הסדרה הוא $a_1 = \sin \alpha$ והמנה $q = \cos \alpha$. נתון כי סכום הסדרה שווה ל- $\frac{\sqrt{3}}{3}$. מצאו את α .
פתרון: כיוון ש- $q = \cos \alpha$ אז $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ואז:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

2. נתונה פונקציה $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$ המוגדרת בקטע $A = [0, 8]$.
מצאו את התמונה של $f(x)$ בתחום ההגדרה A .
פתרון: מתקיים כי $g(x) = x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$ שמקיימת כי $g(x) \geq 0$ כאשר $x \in (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$ ו- $g(x) \leq 0$ כאשר $x \in [3, 5]$. לכן בתחום ההגדרה הנתון $A = [0, 8]$ מתקיים:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 15 & x \in [0, 3] \cup [5, 8] \\ -(x^2 - 8x + 15) & x \in [3, 5] \end{cases}$$

מתקיים כי המקסימום של $f(x)$ בקטע $[3, 5]$ מתקבל ב- $x = 4$ ושווה ל- $f(4) = 1$ ומינימום מתקבל ב- $x = 0$ ושווה ל- $f(0) = f(5) = 0$.
ולכן התמונה של f בקטע $[3, 5]$ הוא $[0, 1]$.
בקטע $[0, 3]$ הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן התמונה היא $[f(3), f(0)] = [0, 15]$.
בקטע $[5, 8]$ הפונקציה מונוטונית עולה ולכן התמונה היא $[f(5), f(8)] = [0, 15]$.
סך הכל התמונה של f בתחום A היא $[0, 15]$.

3. יהי $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{20}$. בפיתוח הבינום של ניוטון של $f(x)$ נסמן:
 a - המקדם החופשי, b - המקדם של x , c - המקדם של x^2 . בחרו את הטענה הנכונה.
פתרון: על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים:

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (\sqrt{x})^k \left(\frac{1}{x}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{\frac{1}{2}k - 20 + k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{\frac{3}{2}k - 20}$$

המקדם החופשי מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k - 20 = 0$. מכאן $3k = 40$ ולכן $k = \frac{40}{3} \notin \mathbb{N}$ ונובע ש- $a = 0$.

המקדם של x מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k - 20 = 1$. מכאן $3k = 42$ ולכן $k = 14$ ונובע ש- $b = \binom{20}{14}$.

המקדם של x^2 מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k - 20 = 2$. מכאן $3k = 44$ ולכן $k = \frac{44}{3} \notin \mathbb{N}$.

ונובע ש- $c = 0$.

לכן האפשרות היחידה שמתאימה היא $2a + b - c^2 = \binom{20}{14}$.

4. מתקיים כי כל פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$, היא פונקציה שאינה קבועה. אז בהכרח:
פתרון: השלילה של הטענה הנתונה: קיימת פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$ והיא פונקציה קבועה. ולכן הטענה שנכונה בהכרח היא: לא קיימת פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$ והפונקציה היא קבועה.

5. תהי A קבוצת כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $\left| \frac{z+\bar{z}+4}{3z-\bar{z}-2} \right| = 1$. אז הקבוצה A מקיימת:
פתרון: מהמשוואה הנתונה נובע כי $|z + \bar{z} + 4|^2 = |3z - \bar{z} - 2|^2$. נסמן $z = a + bi$ ולכן נקבל את השוויון הבא:

$$|2a + 4|^2 = (3(a + bi) - (a - bi) - 2)^2 = |2a - 2 + 4bi|^2 = (2a - 2)^2 + 16b^2$$

ולכן

$$4a^2 + 16a + 16 = 4a^2 - 8a + 4 + 16b^2 \Rightarrow a = \frac{1}{24} (16b^2 - 12) = \frac{1}{6} (4b^2 - 3)$$

ולכן $A = \{a + bi \mid a = \frac{1}{6} (4b^2 - 3)\}$ ביחס לציר הממשי.

6. נתונה המשוואה $z^3 - (2 + 8i)z^2 + (1 + 8i)z = 0$. בחרו את הטענה הנכונה.
פתרון: מתקיים

$$z^3 - (2 + 8i)z^2 + (1 + 8i)z = z(z^2 - (2 + 8i)z + (1 + 8i)) = 0$$

קיבלנו ש- $z_1 = 0$ הוא פתרון למשוואה. נמצא פתרונות של המשוואה הריבועית:

$$z_{1,2} = \frac{2 + 8i \pm \sqrt{(2 + 8i)^2 - 4(1 + 8i)}}{2} = \frac{2 + 8i \pm \sqrt{(4 + 32i - 64) - 4 - 32i}}{2} =$$

$$\frac{2 + 8i \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 + 8i \pm 8i}{2} = 1 + 4i \pm 4i$$

ולכן $z_2 = 1 + 8i$ ו- $z_3 = 1 + 4i$. לכן למשוואה שני פתרונות ממשיים והחלק המדומה של הפתרון השלישי הוא 8.

7. לכל n טבעי נסמן: $S_n = \log_{10} \frac{2}{1} + 2 \log_{10} \frac{3}{2} + \dots + n \log_{10} \frac{n+1}{n}$. חשבו את S_9 .
פתרון: מתקיים:

$$S_9 = \log_{10} \frac{2}{1} + 2 \log_{10} \frac{3}{2} + \dots + 9 \log_{10} \frac{10}{9} = \log_{10} \frac{2}{1} + \log_{10} \frac{3^2}{2^2} + \dots + \log_{10} \frac{10^9}{9^9} =$$

$$\log_{10} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{10^9}{9^9} \right) = \log_{10} \left(\frac{10^9}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9} \right) = \log_{10} 10^9 - \log_{10} (9!) = 9 - \log_{10} (9!)$$

8. נתון פולינום $p(x) = x^5 + ax^4 + 5x^3 - 27x^2 - 36x + b$ כאשר a, b פרמטרים ממשיים. ידוע כי:

1. $3i, -3i$ הם שני שורשים של הפולינום.

2. מכפלת שורשי הפולינום שווה ל-0.

3. סכום שורשי הפולינום שווה ל-3.

בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: על פי הנתון מתקיים כי סכום שורשי הפולינום הוא 3.

מצד שני, על פי נוסחאות וייטה סכום שורשי הפולינום הוא $-\frac{a}{1}$ ולכן $a = -3$.

בנוסף, על פי הנתון מכפלת שורשי הפולינום היא 0.

מצד שני, על פי נוסחאות וייטה, מכפלת שורשי הפולינום היא $-b = (-1)^5 \frac{b}{1}$ ולכן $b = 0$.

לכן $p(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 27x^2 - 36x = x(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36)$

על פי הנתון $3i, -3i$ שורשים של הפולינום ולכן הפולינום $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$

מחלק את הפולינום $q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$

מחלקת פולינומים מקבלים כי

$$q(x) = (x^2 + 9)(x^2 - 3x - 4) = (x^2 + 9)(x - 4)(x + 1)$$

ולכן $x = 4$ הוא שורש של הפולינום.

9. נתונה הפונקציה $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x + \ln(3 - x^2)$ כאשר A

הוא תחום ההגדרה המקסימלי של f .

בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $A = \{x \mid 3 - x^2 > 0\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

מתקיים $f'(x) = 1 - \frac{2x}{3-x^2} = \frac{3-2x-x^2}{3-x^2} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$

מתקיים כי המונה מתאפס ב- $x = -3$, $x = 1$, אבל $x = -3$ לא בתחום ההגדרה ולכן

יש נקודה אחת חשודה לקיצון והיא $x = 1$.

מתקיים כי $f'(x) > 0$ עבור $x < 1$ ו- $f'(x) < 0$ עבור $x > 1$ בסביבה מסויימת של

1 ולכן $x = 1$ היא נקודת מקסימום מקומי.

10. תהי $g(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $\sin x \cos x$.

נתון כי הפונקציה $f(x) = \arcsin(2g(x))$ עוברת דרך הנקודה $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$.

מצאו את $f(\frac{\pi}{4})$.

פתרון: מתקיים $g(x) = \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$

לכן $f(x) = \arcsin(-\frac{1}{2} \cos(2x) + 2C)$

לכן $f(\frac{\pi}{2}) = \arcsin(-\frac{1}{2} \cos(\pi) + 2C) = -\frac{\pi}{6}$

לכן $C = -\frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2} + 2C = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

לכן $f(\frac{\pi}{4}) = \arcsin(-\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}) - 1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

11. נתון ישר $l: \frac{x-7}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+7}{-3}$ ונתונה נקודה $A(-1, 2, 5)$ מחוץ לישר.

נתון כי המישור $3x + By + Cz + D = 0$ מכיל את הישר ואת הנקודה.

מצאו את D .

פתרון: על פי הנתון הנורמל למישור הנתון הוא $(3, B, C)$.

בנוסף, ההצגה הפרמטרית של הישר הנתון היא $l: (7, -5, -7) + t(2, -2, -3)$.

כיוון שהישר מוכל במישור, וקטור הכיוון של הישר ניצב לנורמל ולכן מתקיים כי

$$(2, -2, -3) \cdot (3, B, C) = 0$$

בנוסף, הנקודות $A(-1, 2, 5)$, $B(7, -5, -7)$ נמצאות על המישור ולכן $\overrightarrow{AB}$ ניצב

$$\text{לנורמל ולכן } (8, -7, -12) \cdot (3, B, C) = 0$$

$$6 - 2B - 3C = 0, \quad 24 - 7B - 12C = 0$$

קיבלנו מערכת משוואות: $4 - 7B - 12C = 0$ ונחסר מהראשונה ונקבל כי $B = 0$ ולכן $C = 2$.

קיבלנו שמשוואת המישור היא $3x + 2z + D = 0$. נציב את הנקודה $(-1, 2, 5)$

$$\text{ונקבל: } -3 + 10 + D = 0 \text{ כלומר } D = -7$$

12. המשוואה $x^2 + y^2 + 2y = k$ מתארת מעגל ברדיוס 5 שמרכזו בנקודה $(0, -1)$,

כאשר k פרמטר ממשי.

קבעו את סוג העקום המתואר על ידי המשוואה $x^2 + (k - 20)x - y^2 = k - 4$.

פתרון: מתקיים כי $k = x^2 + y^2 + 2y = x^2 + (y + 1)^2 - 1$ ולכן $x^2 + (y + 1)^2 =$

$$k + 1$$

כיוון שהמשוואה מתארת מעגל ברדיוס 5 נקבל כי $k + 1 = 25$ לכן $k = 24$.

לכן נקבל את המשוואה הבאה: $x^2 + 4x - y^2 = 20$, כלומר $(x + 2)^2 - y^2 = 24$

וזוהי משוואה של היפרבולה.

13. נתונות שתי פונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. בחרו את הטענה הנכונה בהכרח.
פתרון: נעבור על הטענות:

(א) אם $f(x), g(x)$ פונקציות מונוטוניות עולות אז גם $f(x) + g(x)$ פונקציה מונוטונית עולה.

הטענה נכונה. אם $x_1 < x_2$ ו- $f(x)$ מונוטונית עולות אז
 $f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2)$ ולכן $f(x_1) \leq f(x_2), g(x_1) \leq g(x_2)$

(ב) אם $f(x), g(x)$ פונקציות חד-חד ערכיות, אז גם $f(x) + g(x)$ פונקציה חד-חד ערכית.

הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ ו- $g(x) = -x$. אלו פונקציות חד-חד ערכיות.
מצד שני, $f(x) + g(x) = 0$ היא לא פונקציה חד-חד ערכית.

(ג) אם $f(x), g(x)$ פונקציות על, אז גם $f(x) + g(x)$ פונקציה על.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ ו- $g(x) = -x$. אלו פונקציות על.
מצד שני, $f(x) + g(x) = 0$ היא לא פונקציה על.

(ד) אם $f(x), g(x)$ פונקציות הפיכות, אז גם $f(x) + g(x)$ פונקציה הפיכה.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ ו- $g(x) = -x$. אלו פונקציות הפיכות.
מצד שני, $f(x) + g(x) = 0$ היא לא פונקציה הפיכה.

(ה) אם $f(x), g(x)$ פונקציות מונוטוניות עולות, אז $f(x)g(x)$ פונקציה מונוטונית עולה.

הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = g(x) = x$. אלו פונקציות עולות.
מצד שני, $f(x)g(x) = x^2$ היא לא פונקציה עולה.

14. יהי k מספר שלם אי-שלילי. נתון כי שטח התחום החסום על ידי הגרפים של

$$f(x) = e^{kx}, g(x) = e^{-kx} \text{ והישר } y = e \text{ שווה ל-} 1. \text{ מצאו את } k.$$

פתרון: מתקיים כי הפונקציות נחתכות בנקודה $(0, 1)$.

בנוסף הפונקציה $f(x)$ חותכת את הישר $y = e$ ב- $x = \frac{1}{k}$ ו- $g(x)$ חותכת את הישר $y = e$ ב- $x = -\frac{1}{k}$.

לכן השטח הדרוש הוא:

$$1 = \int_{-\frac{1}{k}}^0 (e - e^{-kx}) dx + \int_0^{\frac{1}{k}} (e - e^{kx}) dx = \left(ex + \frac{1}{k} e^{-kx} \right) \Big|_{-\frac{1}{k}}^0 + \left(ex - \frac{1}{k} e^{kx} \right) \Big|_0^{\frac{1}{k}} =$$

$$\frac{1}{k} - \frac{e}{k} + \frac{e}{k} + \frac{e}{k} - \frac{e}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

ולכן $k = 2$.

15. נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - 5x^4 + ax^8 - 10x^9 + x^{10}$ כאשר a פרמטר ממשי.

נתון כי מתקיים $f^{(8)}(1) = 0$ כאשר $f^{(8)}(x)$ מציין את הנגזרת השמינית של $f(x)$.
מצאו את a .

פתרון: מתקיים כי הנגזרת השמינית של $f(x)$ היא:

$$f^{(8)}(x) = 8!a - 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2x + 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3x^2 = 8!a - 10!x + \frac{10!}{2}x^2$$

מתקיים כי $f^{(8)}(1) = 0$ ולכן $\frac{10!}{2} = 10! - \frac{10!}{2} = 10! \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{10!}{2}$ ולכן $a = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

16. מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\tan(4x)} + \ln(x - x^2)$.
פתרון: תחום ההגדרה של $\ln(x - x^2)$ הוא $(0, 1)$.
תחום ההגדרה של $\sqrt{\tan(4x)}$ הוא

$$\{x \mid \tan(4x) \geq 0\} = \left\{x \mid \pi k \leq 4x < \frac{\pi}{2} + \pi k\right\} = \left\{x \mid \frac{\pi}{4}k \leq x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k\right\}$$

לכן חיתוך שני תחומי ההגדרה הוא: $(0, \frac{\pi}{8}) \cup [\frac{\pi}{4}, 1)$

17. מצאו את כל ערכי $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 2$ כך שלמשוואה $\frac{1}{m-2}x^2 + 3x + 2(m-3) = 0$ אין פתרון ממשי.
פתרון: כדי שלמשוואה לא יהיה פתרון ממשי, נדרוש שהדיסקרימיננטה Δ תהיה שלילית. מתקיים:

$$\Delta = 9 - \frac{8(m-3)}{m-2} = \frac{9m - 18 - 8m + 24}{m-2} = \frac{m+6}{m-2}$$

מתקיים כי $\Delta < 0$ אם $m+6 > 0$, $m-2 < 0$ או $m+6 < 0$, $m-2 > 0$.
במקרה הראשון נקבל כי $m \in (-6, 2)$. במקרה השני אין פתרון.
לכן התשובה הסופית היא $m \in (-6, 2)$.

18. יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ וקטורים במרחב המקיימים $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2\sqrt{2}$. חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$.

פתרון: מתקיים כי $\vec{u} - \vec{v}$ הוא הצלע השלישית במשולש הנוצר על ידי $\vec{u}$, $\vec{v}$ ועל פי הנתון זהו משולש שווה צלעות. לכן הזווית בין $\vec{u}$, $\vec{v}$ היא $\frac{\pi}{3}$. לכן

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8 = 24$$

ולכן $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{24}$

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ המקיימת $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{f(x) \sin x}$.
פתרון: נגדיר $g(x) = f(x) \sin x$. מתקיים כי $g'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$.
לכן $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
מצד שני, על פי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$2 = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{g(x) - g(0)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x}{\frac{1}{2}(2x - \pi)} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x}{2x - \pi}$$

ולכן $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x}{2x - \pi} = 1$

20. חשבו את הגבול: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{4^x - 2^x - 2}$.
 פתרון: נסמן $t = 2^x$. מתקיים כי כאשר $x \rightarrow 1$ אז $t \rightarrow 2$ לכן צריך לחשב את הגבול:

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t - 2}{t^2 - t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t - 2}{(t - 2)(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t + 1} = \frac{1}{3}$$