

שאלה מס' 1

מצאו את התחום שבו גרף הפונקציה $f(x) = \log_{0.3}(\log_{0.25}(x - x^2))$ נמצא מתחת לציר איקס.

פתרון:

נדרש $f(x) < 0$. תחילה יש לבדוק את תחום ההגדרה. נדרש:

$$\bullet \log_{0.25}(x - x^2) > 0$$

$$\bullet x - x^2 > 0$$

משני תנאים אלו נקבל $0 < x < 1$.

בסיס הלוגריתם קטן מ-1 ולכן על מנת לקבל $f(x) < 0$ נדרש $\log_{0.25}(x - x^2) > 1$. מכאן $x - x^2 < 0.25$. לסיכום, נקבל: $0 < x < 0.5$ או $0.5 < x < 1$.

שאלה מס' 2

מצאו את כל הפתרונות של המשוואה: $z^2 = \bar{z}$.

פתרון:

נסמן $z = a + bi$. מהנתון נקבל:

$$(a + bi)^2 = a - bi \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

לכן:

$$\bullet a^2 - b^2 = a$$

$$\bullet 2ab = -b$$

מפתרון שתי המשוואות נקבל ארבעה פתרונות:

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 1 \quad z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

שאלה מס' 3

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(-2) = 0$ ו- $f'(x) = \frac{x-4}{x+3}$.

$$f(x) = \boxed{x - 7 \ln |x + 3| + 2}$$

פתרון:

$$\text{נתון } f'(x) = \frac{x-4}{x+3} \text{ ולכן}$$

$$f(x) = \int \frac{x-4}{x+3} dx = \int \frac{x+3-7}{x+3} dx = x - 7 \ln |x+3| + C$$

כיוון ש- $f(-2) = 0$ אז $C = 2$.

שאלה מס' 4

חשבו:

$$\cos\left(2 \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \boxed{\frac{17}{25}}$$

פתרון:

$$\cos\left(2 \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

שאלה מס' 5

תנו דוגמה לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שמקיימות: $f(x) < g(x)$ וגם $f'(x) > g'(x)$ לכל x ממשי. כתבו כל אחת מן הפונקציות בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{\arctan x}$$

$$g(x) = \boxed{3}$$

פתרון:

$$\text{מתקיים: } -\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} < 3 = g(x) .$$

$$\text{אבל: } g'(x) = 0 < \frac{1}{x^2+1} = f'(x) .$$

שאלה מס' 6

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(-1, 2, -3)$ ומאונך לישר החיתוך בין המישורים $x = 2$; $y - z = 1$

$$\boxed{y + z + 1 = 0}$$

פתרון:

משוואת ישר החיתוך היא: $(2, 1, 0) + t(0, 1, 1)$. (בדקו שנמצא על שני המישורים).
נורמל המישור הוא כיוון הישר: $N = (0, 1, 1)$.
נציב את הנקודה הנתונה: $0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + D = 0$.

שאלה מס' 7

כתבו את פתרון אי שוויון הבא כאיחוד של קטעים: $|5x + 1| - |x - 3| \leq 2$.
אם מדובר בפחות מ-3 קטעים, כתבו * בתיבות הריקות. (הסימון לאיחוד הוא $\cup$).

$$\boxed{\left[-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right]} \cup \boxed{} \cup \boxed{}$$

שאלה מס' 8

תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = 0$.
כתבו את הפונקציה בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{3x + 5}$$

פתרון:

אפשר לקחת למשל פולינום ממעלה 1 (פונקציה לינארית), $f(x) = ax + b$,
ע"י הצבת התנאים הנתונים נקבל את a, b .

שאלה מס' 9

מצאו את כל הערכים x בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ שעבורם מתקיים $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$.

$$\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

פתרון:

נשים לב שבתחום הנתון, המכנה בשני האגפים למתאפס לכן אפשר להכפיל.

$$1 - \cos^2 2x = 2 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 2x = 2 \sin^2 x$$

$$4 \sin^2 x \cos^2 x = 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

הערה: נשים לב שניתן לצמצם מכיוון שסינוס לא מתאפס בתחום.

שאלה מס' 10

תנו דוגמא לשתי פונקציות $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ שונות המקיימת: $f^{-1}(x) = f(x)$.

$$f_1(x) = \boxed{x}$$

$$f_2(x) = \boxed{\frac{1}{x}}$$

שאלה מס' 11

יהיו $z_1, z_2, \dots, z_{20}$ מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל ברדיוס 5. נתון ש- $|z_1 + z_2 + \dots + z_{20}| = 20$.

מהנתון נקבל: $1 \leq k \leq 20$, $|z_k|^2 = 25$, ולכן:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{20}} \right| &= \left| \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} + \dots + \frac{\overline{z_{20}}}{|z_{20}|^2} \right| = \frac{1}{25} |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{20}}| = \\ &= \frac{1}{25} |\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_{20}}| = \frac{1}{25} |z_1 + z_2 + \dots + z_{20}| = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

שאלה מס' 12

תהא $f(x) = \ln x$. תנו דוגמא לפונקציה $g(x)$ כך ש- $(g \circ f)(x) = x + 3$.
כתבו את הפונקציה בנוסחה אחת.

$$g(x) = \boxed{e^x + 3}$$

שאלה מס' 13

יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ וקטורים נתונים כך שמתקיים $\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$ וגם $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.
נתון שהוקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$ ניצבים. מצאו את $|\vec{w}|$.

$$|\vec{w}| = \boxed{\sqrt{2}}$$

פתרון:

מהנתון נקבל: $\vec{v} + \vec{u} = -\vec{w}$ ולכן:

$$|w|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = |v|^2 + |u|^2 = 2$$

הערה: אפשר להסיק מהנתונים שהוקטורים מגדירים משולש (הסבירו מדוע) ישר זווית (הסבירו) ש- $\vec{w}$ הוא היתר.

שאלה מס' 14

חשבו:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x + 1} - \sqrt{\cos x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1 - \cos x}{(\sqrt{\sin x + 1} + \sqrt{\cos x}) \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + 1)^2 - \cos^2 x}{(\sin x + 1 - \cos x)(\sqrt{\sin x + 1} + \sqrt{\cos x}) \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x}{(\sin x + 1 - \cos x)(\sqrt{\sin x + 1} + \sqrt{\cos x}) \sin x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

הערה: בפתרון השתמשנו בכפל בצמוד הכפלי ובנוסחה $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
אפשר גם לפתור בדרכים אחרות. למשל, להשתמש בנוסחאות טריגונומטריות של חצי הזווית או כל נוסחה אחרת.

שאלה מס' 15

נתון שהשארית בחלוקת הפולינום $p(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1$ בפולינום $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ היא: $r(x) = ax^2 + bx + c$ מצאו את c .

$$c = \boxed{1}$$

פתרון:

ע"פ משפט חלוקת פולינום עם שארית, קיים $h(x)$ כך שמתקיים: $p(x) = q(x)h(x) + r(x)$. נשים לב ש- $q(0) = 0$ נציב את הנתונים ו- $x = 0$

$$1 = p(0) = q(0)h(0) + r(0) = 0 + r(0) = c$$

שאלה מס' 16

מצאו את מנת הסדרה ההנדסית הבאה: $1, a, b, c, d, 243$

$$q = \boxed{\sqrt[5]{243} = 3}$$

פתרון:

מנת הסדרה היא a ולכן $1 \cdot a^5 = 243$

שאלה מס' 17

רשמו את המספר $0.72222\dots$ כמנה של שני שלמים.

$$\boxed{\frac{13}{18}}$$

פתרון:

$$0.72222\dots = \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{100} + \dots = \frac{7}{10} + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{13}{18}$$

הערה: השתמשנו בסכום של סדרה הנדסית אינסופית שאיברה הראשון הוא $\frac{2}{100}$ ומנתה היא $\frac{1}{10}$.

שאלה מס' 18

יהא $p(x)$ פולינום. נתון ש- $p'(x) = (x^3 + 1)^{16}$ מצאו את המקדם של x^{16} בפולינום $p(x)$.

$$a_{16} = \boxed{\binom{16}{5} \frac{1}{16} = 273}$$

פתרון:

מהנתון ומנוסחאת הבינום נקבל: $p'(x) = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} (x^3)^k$

מכאן נובע ש- $p(x) = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \frac{x^{3k+1}}{3k+1}$

ולכן המחובר בפולינום שמופיע בו x^{16} מתקבל כאשר $k = 5$.

שאלה מס' 19

נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^x + x^3 + x$ חשבו:

$$(f^{-1})'(2) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

פתרון:

מתקיים $f(0) = 2$ ולכן, $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)}$

$$f'(x) = 2e^x + 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(0) = 3 \Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{1}{3}$$

שאלה מס' 20

תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ שעולה בתחום $(-1, 3)$ ויורדת בתחום $(3, 8)$.

$$f(x) = \boxed{-x^2 + 6x}$$