פתרון מבחן סיווג במתמטיקה 28.5.2019

שאלה מס' 1

נתון ש־ $\log_6 \frac{3}{5} = a$. כיתבו ביטוי עבור $\log_6 360$ בעזרת הפרמטר a

$$\log_6 360 = \boxed{3 - a}$$

פתרון: נשתמש בחוקי לוגריתמים.

$$\log_6 360 = \log_6 6^2 \cdot 10 = \log_6 6^2 + \log_6 \frac{6}{3} \cdot 5 = 2 + \log_6 6 + \log_6 \frac{5}{3} = 3 - a$$

שאלה מס' 2

מצאו מספר ממשי $0 < x < \frac{\pi}{2}$ כך שמתקיים: $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + ... = \frac{1}{3}$

$$x = \boxed{\tfrac{\pi}{3}}$$

פתרון: זהו סכום של סדרה הנדסית אינסופית שבה $a_1 = \cos x$ ו־ $q = -\cos x$.

בתחום הנתון מתקיים $0 < |q| < 1$. נתון $S = \frac{1}{3}$

לכן: $\frac{1}{3} = \frac{\cos x}{1+\cos x}$. כלומר, $x = \frac{\pi}{3}$

שאלה מס' 3

מצאו פונקציה רציפה $f(x)$ שקבוצת הנקודות x המקיימות $f(x) \geq 5$ היא $[-3,-2] \cup [2,3]$ (כאן $A \cup B$ מציין איחוד של A ו־B).

$$f(x) = \boxed{-(x^2-4)(x^2-9)+5}$$

פתרון: נבצע הזזה לאפס. במקרה זה קצוות הקטעים הם נקודות ההתאפסות לכן קל לבנות פולינום. עכשיו נבצע הזזה חזרה.

הערה: יתכנו פתרונות נוספים.

שאלה מס' 4

חשבו את $\cos(\arcsin \frac{2}{5})$

$$\boxed{\frac{\sqrt{21}}{5}}$$

פתרון: נשתמש בזהות $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ונקבל $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

$$\cos(\arcsin \frac{2}{5}) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin \frac{2}{5}))^2} = \sqrt{1 - (\frac{2}{5})^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

שאלה מס' 5

נתון ששורשי הפולינום $p(x) = 3x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ הם r, s, t מצאו פולינום ששורשיו הם $\frac{r}{2}, \frac{s}{2}, \frac{t}{2}$.

$$p(x) = \boxed{p(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1}$$

פתרון: אפשר להשתמש בנוסחאות וייטה. נראה כאן השוואת מקדמים.
נתון: r, s, t הם ששורשי הפולינום $p(x) = 3x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ לכן: $p(x) = 3(x - r)(x - s)(x - t)$
לכן ע"י השוואת מקדמים (מוויטה היינו מקבלים בדיוק אותו דבר):

$$-3rst = 8$$

$$3(rs + rt + st) = 4$$

$$-3(r + s + t) = 6$$

הפולינום הנדרש מקיים: $p(x) = a(x - \frac{r}{2})(x - \frac{s}{2})(x - \frac{t}{2})$ ולכן:

$$a_0 = -a \cdot \frac{1}{8} rst$$

$$a_1 = a \cdot \frac{1}{4}(rs + rt + st)$$

$$a_2 = -a \cdot \frac{1}{2}(r + s + t)$$

$$a_3 = a$$

שאלה מס' 6

מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים: $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.01$

$$n = \boxed{2501}$$

<u>פתרון:</u>

$$0.01 > \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

לכן, $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>100 \quad \Leftarrow \quad 100<2\sqrt{n}$

שאלה מס' 7

מצאו את סכום המספרים הדו ספרתיים שאינם מתחלקים ב־ 3.

$$S = \boxed{3240}$$

<u>פתרון:</u> נסמן: S_1 ־ סכום כל המספרים הדו ספרתיים.
S_2 ־ סכום כל המספרים הדו ספרתיים שמתחלקים ב־ 3.
התשובה תהיה S_1-S_2

$$S_1 = \frac{(10+99)90}{2} = 109\cdot 45$$

$$S_2 = \frac{(12+99)30}{2} = 111\cdot 15$$

$$99 = 12+3(n_2-1) \quad \Leftarrow \quad n_2=30$$

$$S_1-S_2 = 15\cdot(327-111) = 3240$$

שאלה מס' 8

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ו־$f(e^2)=1$.

$$f(x) = \boxed{\ln(\ln x)+1-\ln 2}$$

<u>פתרון:</u>

$$f(x) = \int\frac{1}{x\ln x}dx = \int\frac{1}{t}dt = \ln t + c = \ln|\ln x| + c$$

נציב את הנתון: $1=f(e^2)=\ln|\ln e^2|+c$ ונקבל $c=1-\ln 2$.

שאלה מס' 9

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שמקבלת מקסימום מקומי ב־ $x = -2$ ומינימום מקומי ב־$x = 0$, ואינה קבועה בשום קטע. כתבו את הפונקציה בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^3}{3} + x^2}$$

שאלה מס' 10

חשבו את הגבול

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+6h)}{h} = \boxed{6}$$

פתרון:
נגדיר $f(x) = \ln x$. מתקיים ש־

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}$$

כיוון ש־ $\lim_{h\to 0} 6h = 0$ מתקיים

$$\lim_{h\to 0} 6\frac{\ln(1+6h) - 0}{6h} = 6f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

שאלה מס' 11

מצאו נקודת מקסימום מקומי של הפונקציה $f(x) = \cos(x^2 - 2x + 1)$.

$$\boxed{(1,1)}$$

פתרון:
מתקיים $f'(x) = 0$ אם $2x - 2 = 0$ או $\sin(x^2 - 2x + 1) = 0$,
כלומר $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = \pi k$ לכן נקודות מועמדות לקיצון הן $1, \pm\sqrt{\pi k} + 1$.
נבדוק את סימן הנגזרת משני צידי $x = 1$.
הביטוי $2x - 2$ חיובי עבור $x > 1$ ושלילי עבור $x < 1$.
מצד שני, $x^2 - 2x + 1 = (x-1) > 0$ לכל $x \neq 1$ ולכן $\sin(x^2 - 2x + 1)$ חיובי בסביבה של $x = 1$.
סך הכל $f'(x) > 0$ עבור $x < 1$ ו־$f'(x) < 0$ עבור $x > 1$, כלומר עבור $x = 1$ מתקבל מקסימום.
מתקיים $f(1) = \cos 0 = 1$ ולכן $(1,1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלה מס' 12

נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + x + 1$ חשבו את $(f^{-1})'(3)$.

$$(f^{-1})'(3) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

<u>פתרון:</u>
מתקיים $f(1) = 3$ ו־ $f'(x) = 3x^2 + 1$.
לכן $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$.

שאלה מס' 13

מצאו זווית α בתחום $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ המקיימת $\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ (כתבו ברדיאנים)

$$\alpha = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

<u>פתרון:</u>
נתון ש־ $\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, כלומר $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$.
לכן $\sin 2\alpha = -1$, כלומר $2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ו־ $\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.
עבור $k = 0$ נקבל $\alpha = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

שאלה מס' 14

חשבו את:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h^5)} - e}{h^5} = \boxed{e}$$

<u>פתרון:</u>
נגדיר $f(x) = e^x$. מתקיים ש־ $f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h} - e^1}{h}$.
כיוון ש־ $\lim_{h\to 0} h^5 = 0$ מתקיים $\lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h^5} - e}{h^5} = f'(1) = e^1 = e$.

שאלה מס' 15

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{|1-x| - |x+2|}$

$$\boxed{x \le -\frac{1}{2}}$$

<u>פתרון:</u>
כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת צריך לדרוש $|1-x| - |x+2| \ge 0$.
נפריד למקרים:
אם $x \ge 1$ אז $-(1-x) - x - 2 = -3 \ge 0$, לכן אי השוויון לא מתקיים לכל $x \ge 1$.
אם $-2 < x < 1$ אז $1 - x - (x+2) = -1 - 2x \ge 0$, כלומר $x \le -\frac{1}{2}$, לכן אי השוויון מתקיים כאשר $-2 < x \le -\frac{1}{2}$.
אם $x \le -2$ אז $1 - x + x + 2 = 3 \ge 0$ ולכן אי השוויון מתקיים לכל $x \le -2$.

שאלה מס' 16

יהא z מספר מרוכב המקיים $z+\frac{1}{z}=1$ חשבו את $|z^{2019}|$

$$|z^{2019}| = \boxed{1}$$

פתרון:
$z+\frac{1}{z}=1$ כלומר $z^2-z+1=0$.
נמצא את הפתרונות: $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מתקיים

$$|z^{2019}| = |z|^{2019} = \left|-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{2019} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right)^{2019} = 1^{2019} = 1$$

שאלה מס' 17

יהיו הוקטורים $\vec{v},\vec{u}$ כך שמתקיים $|\vec{u}|=3$ $\quad |\vec{v}|=2$ וגם $|\vec{v}-\vec{u}|=1$.
מצאו את הזווית (ברדיאנים) α בין הוקטורים $\vec{u},\vec{v}$.

$$\alpha = \boxed{0}$$

פתרון:
מתקיים

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{3\cdot 2} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{6}$$

לכן נותר לחשב $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$$1 = |\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 3^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2^2$$

ולכן $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$. נציב בנוסחה ונקבל ש־ $\cos\alpha=\frac{6}{6}=1$.

שאלה מס' 18

מהו המקדם של x^5 בפולינום $(x^2-2x+1)^8$?

$$a_5 = \boxed{\binom{16}{5}(-1)^{11} = -\binom{16}{5}}$$

פתרון:
מתקיים $(x^2-2x+1)^8=(x-1)^{16}$.
על פי נוסחת הבינום של ניוטון המקדם של x^5 בפיתוח הוא $\binom{16}{5}(-1)^{11}=-\binom{16}{5}$.

שאלה מס' 19

חשבון:

$$\int_0^1 \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+1}dx = \boxed{\frac{4}{3}+\ln 2}$$

<u>פתרון:</u>

על פי חילוק פולינומים מתקיים $\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+1} = x^2+2x+\frac{1}{x+1}$ לכן

$$\int_0^1 \left(x^2+2x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+1+\ln 2-0 = 1\frac{1}{3}+\ln 2$$

שאלה מס' 20

נתונים הישרים:

$$l_1 : (1,-2,0)+t(3,-2,1)$$

$$l_2 : (-1,3,0)+s(4,1,k)$$

מיצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k הישרים נמצאים באותו מישור.

$$k = \boxed{2}$$

<u>פתרון:</u>

כדי שהישרים יהיו על אותו מישור, צריך שלא יהיו מצטלבים. כלומר, צריך שיהיו או מקבילים או מתלכדים או נחתכים. וקטורי הכיוון שלהם:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_1} &= (3,-2,1)\\ \overrightarrow{a_2} &= (4,1,k)\end{aligned}$$

הם אינם פרופורציונליים בלי קשר לערכו של k. לכן הישרים אינם מקבילים ובודאי אינם מתלכדים. אם כך, יש למצוא k עבורו הם נחתכים. נחשב את נקודת החיתוך על ידי פתרון שלוש משוואות:

$$\begin{aligned}1+3t &= -1+4s\\ -2-2t &= 3+s\\ t &= ks\end{aligned}$$

נעביר אגפים בשתי המשוואות הראשונות ונקבל:

$$\begin{aligned}3t+2 &= 4s\\ -5-2t &= s\end{aligned}$$

קיבלנו $3t+2=-4(5+2t) \Leftarrow 3t+2=-20-8t \Leftarrow 11t=-22 \Leftarrow t=-2$. נציב במשוואה השניה לקבלת $s=-5+4$ כלומר $s=-1$. מהמשוואה השלישית, $t=ks$ ולכן $-2=-k$ כלומר $k=2$. עבור ערך זה של k הישרים נחתכים ובפרט נמצאים על אותו המישור.