

מבחן סיווג במתמטיקה 28.3.24

פתרון

1. תהי a_n סדרה. נגדיר סדרה חדשה $b_n = 4^{a_n}$. נתון כי b_n היא סדרה הנדסית. נתון: $b_9 = 64$ ו- $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 15$. מצאו את a_1 . פתרון: כיוון ש- b_n היא סדרה הנדסית, מתקיים כי

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{a_{n+1}}}{4^{a_n}} = 4^{a_{n+1}-a_n} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \log_4 q$$

ולכן a_n היא סדרה חשבונית עם הפרש $d = \log_4 q$. בנוסף, מתקיים כי $b_9 = 64 = 4^3$ ולכן $a_9 = 3$. מתקיים

$$18 = 15 + 3 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_1 + 3)}{2}$$

$$a_1 = 1 \quad 4 = a_1 + 3 \quad \text{לכן}$$

2. נתונה פונקציה $f(x) = |x - 2|$ המוגדרת בקטע $A = [1, 5]$. מצאו את התמונה של $f(x)$ בתחום ההגדרה A . פתרון: מתקיים כי

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \in [2, 5] \\ 2 - x & [1, 2) \end{cases}$$

בקטע $[2, 5]$ הפונקציה מונוטונית עולה ולכן התמונה היא $[0, 3]$. בקטע $[1, 2)$ הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן התמונה היא $(0, 1]$. לכן התמונה של הפונקציה בקטע $[1, 5]$ היא $[0, 3]$.

3. יהי $p(x) = (x^2 - 3)^n (5x - 1)$ כאשר n מספר טבעי. נתון כי המקדם החופשי של $p(x)$ שווה ל-81. מצאו את המקדם של x^7 . פתרון: המקדם החופשי של $p(x)$ הוא $-81 = -3^4 = (-1) \cdot (-3)^n$ ולכן $n = 4$ לכן

$$p(x) = (x^2 - 3)^4 (5x - 1) = \left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (x^2)^k (-3)^{4-k} \right) (5x - 1) =$$

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \cdot 5 \cdot (-3)^{4-k} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-3)^{4-k} x^{2k}$$

במחבר הראשון מקדם של x^7 מתקבל כאשר $2k+1=7$, כלומר $k=3$ והמקדם המתקבל הוא: $\binom{4}{3} \cdot 5 \cdot (-3)^{4-3} = -60$.
 במחבר השני, כל החזקות של x הן זוגיות ולכן המקדם של x^7 הוא 0.
 לכן המקדם של x^7 ב- $p(x)$ הוא -60.

4. נתון שלכל מישור M קיים ישר ℓ כך שלכל מישור π המכיל את ℓ מתקיים כי π ניצב ל- M . אז בהכרח:
 פתרון: השלילה של הטענה הנתונה היא:
 "קיים מישור M כך שלכל ישר ℓ קיים מישור π המכיל את ℓ ומקיים כי π לא ניצב ל- M ".
 ולכן הטענה הנתונה שקולה לטענה:
 "לא קיים מישור M כך שלכל ישר ℓ קיים מישור π המכיל את ℓ ומקיים כי π לא ניצב ל- M ".

5. נתון $z = -1 + i$. נסמן ב- k את המספר השלם החיובי הקטן ביותר עבורו z^k מספר ממשי. מצאו את k .
 פתרון: מתקיים כי $z = -1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$ ולכן $z^k = (\sqrt{2})^k \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} k \right)$ הוא מספר ממשי אם $\frac{3\pi}{4} k$ הוא כפולה של π וה- k המינימלי שמקיים זאת הוא $k=4$.

6. נתון הביטוי $a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{600} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{600}$. חשבו את a .
 פתרון: מתקיים כי $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right)$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{6} \right)$ ולכן:

$$a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{600} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{600} = \left(\operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)^{600} - \left(\operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right)^{600} =$$

$$(\operatorname{cis} (5\pi))^{100} - (\operatorname{cis} (7\pi))^{100} = (-1)^{100} - (-1)^{100} = 0$$

7. נתונה סדרה a_n על ידי נוסחת נסיגה:
 $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = \log_2 (2a_n + 1) - \log_2 (a_n)$. בחרו את ההיגד הנכון.
 פתרון: מתקיים: $a_{n+1} = \log_2 \left(\frac{2a_n+1}{a_n} \right) = \log_2 \left(2 + \frac{1}{a_n} \right)$
 אם $a_n \geq a_{n-1}$ אז $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}}$ ולכן $2 + \frac{1}{a_n} \leq 2 + \frac{1}{a_{n-1}}$ וכיוון ש- $\log_2 x$ היא פונקציה מונוטונית עולה מתקיים כי

$$a_{n+1} = \log_2 \left(2 + \frac{1}{a_n} \right) \leq \log_2 \left(2 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) = a_n$$

באופן דומה, אם $a_n \leq a_{n-1}$ אז $a_{n+1} \geq a_n$.
 נבדוק את האיברים הראשונים: $a_1 = 1$, $a_2 = \log_2 \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \log_2 (3) > \log_2 (2) = 1 = a_1$
 ולכן לכל n אי-זוגי מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ ולכל n זוגי מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

8. תהי $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 70$. נתון כי $f(x) < 0$ אם ורק אם $x \in (-5, -2) \cup (1, k)$. כאשר $k > 1$. מצאו את $f(-1)$.
 פתרון: הפונקציה היא פולינום ממעלה 4 ועל פי הנתון, הפונקציה מחליפה סימן ב- $-5, -2, 1, k$ ולכן אלו השורשים של הפולינום.
 על פי נוסחאות וייטה מתקיים $70 = (-1)^4 \cdot \frac{70}{1} = (-1) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot k$ ולכן $k = 7$.
 לכן מתקיים כי $f(x) = (x+5)(x+2)(x-1)(x-7)$ ו-
 $f(-1) = (-1+5)(-1+2)(-1-1)(-1-7) = 4 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-8) = 64$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = ax^4 - bx^3 - cx^2 - 3x$.
 נתון כי ל- $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול ב- $x = 1$ ו- $x = -\frac{1}{3}$. אז בהכרח:
 פתרון: מתקיים $f'(x) = 4ax^3 - 3bx^2 - 2cx - 3$ ולכן $f''(x) = 12ax^2 - 6bx - 2c$.
 כיוון ש- $x = 1$ ו- $x = -\frac{1}{3}$ הן נקודות פיתול ולכן $f''(1) = 0$ ו- $f''(-\frac{1}{3}) = 0$.
 מתקיים:

$$f''(1) = 12a - 6b - 2c = 0, \quad f''\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a + 2b - 2c = 0$$

ולכן

$$12a - 6b - 2c = \frac{4}{3}a + 2b - 2c \Rightarrow 36a - 18b = 4a + 6b$$

$$\text{ולכן } 32a = 24b, \text{ כלומר } 8a = 6b$$

10. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin(x) + m \cos(x)$ כאשר m פרמטר ממשי.
 נתון כי ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון ב- $x = \frac{\pi}{6}$. חשבו את $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} f(x) dx$.
 פתרון: מתקיים כי $f'(x) = \cos x - m \sin x$ וכיוון ש- $x = \frac{\pi}{6}$ נקודת קיצון מתקיים
 כי $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - m \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - m \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow m = \sqrt{3}$ ולכן

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x) dx = \left(-\cos x + \sqrt{3} \sin x \right) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} =$$

$$-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -4$$

11. נתון כי המישור $\pi: Ax + 2y + Cz + D = 0$.
 עובר דרך הנקודות $P(3, 6, 5)$ ו- $Q(2, 7, 0)$.
 בנוסף, נתון כי המישור π מאונך למישור $x + 2y + 3z - 4 = 0$. מצאו את C .
 פתרון: הנורמל של המישור π הוא $\vec{N} = (A, 2, C)$. מתקיים כי $\vec{N}$
 ניצב ל- $\vec{PQ} = (-1, 1, -5)$ ולנורמל של המישור השני $(1, 2, 3)$.
 לכן מתקיים:
 $(-1, 1, -5) \cdot (A, 2, C) = -A + 2 - 5C = 0$
 $(1, 2, 3) \cdot (A, 2, C) = A + 4 + 3C = 0$
 מחיבור שתי המשוואות, נקבל $6 - 2C = 0$ ולכן $C = 3$.

12. נתון העקום $2x^2 - 4(x - y^2) = 38$. קבעו את סוג העקום.
פתרון: מתקיים:

$$2x^2 - 4(x - y^2) = 2x^2 - 4x + 4y^2 = 2(x - 1)^2 - 2 + 4y^2 = 38$$

ולכן $2(x - 1)^2 + 4y^2 = 40$ משוואת אליפסה שאינה מעגל.

13. נתונה $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש.
בחרו את הטענה הנכונה בהכרח.
פתרון: נעבור על הטענות:

(א) הפונקציה $e^{-\frac{1}{f(x)}}$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.
הטענה נכונה: כיוון ש- $f(x)$ מונוטונית עולה ממש הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ היא מונוטונית יורדת ממש, ולכן $-\frac{1}{f(x)}$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.
כיוון ש- e^x היא גם פונקציה מונוטונית עולה ממש ולכן ההרכבה $e^{-\frac{1}{f(x)}}$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.

(ב) הפונקציה $e^{-\frac{1}{f(x)}}$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ממש.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ פונקציה מונוטונית עולה ממש, אבל הפונקציה $e^{-\frac{1}{x}}$ לא מונוטונית יורדת ממש.

(ג) הפונקציה $\cos(f(x))$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ממש.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ פונקציה מונוטונית עולה ממש אבל $\cos x$ היא לא פונקציה יורדת ממש.

(ד) הפונקציה $e^{f(x)}$ היא פונקציה על.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = \arctan x$ מונוטונית עולה ממש אבל $e^0 < e^{\arctan x} < e^{\frac{\pi}{2}}$ ולכן $e^{f(x)}$ לא על $(0, \infty)$.

(ה) הפונקציה $\tan(f(x))$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x) = x$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש, אבל $\tan x$ לא מונוטונית עולה ממש בתחום $(0, \infty)$.

14. תהי $f(x) = -x^2 + 4\sqrt{x} - 1$. תהי (x_1, y_1) נקודת הקיצון היחידה של $f(x)$.
לגרף הפונקציה $f(x)$ העבירו משיק בנקודה $(x_2, -9)$ שמשוואתו היא $y = -7x + 19$.
חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והישר $x = x_1$.
פתרון: מתקיים $f'(x) = -2x + \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ אם $x = \sqrt{x}$ ולכן $x = 0$ או $x = 1$ אבל $f'(x)$ לא מוגדרת ב- $x = 0$ ולכן נקודת הקיצון היחידה היא $x_1 = 1$ ונקודת הקיצון היא: $(1, 2)$.

על פי הנתון השני, המשיק עובר בנקודה $(x_2, -9)$ ולכן מתקיים $-9 = -7x_2 + 19$ ולכן $x_2 = 4$. הישר המשיק נמצא מעל לגרף הפונקציה בקטע $[1, 4]$ ולכן השטח הדרוש הוא:

$$\int_1^4 (-7x + 19 + x^2 - 4\sqrt{x} + 1) dx = \int_1^4 (x^2 - 7x - 4\sqrt{x} + 20) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 20x \right]_1^4 = \frac{64}{3} - 56 - \frac{8}{3} \cdot 8 + 80 - \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{2} - \frac{8}{3} + 20 \right) = 4 + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = 9\frac{5}{6}$$

15. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin(2x)$.
 חשבו את המכפלה $f^{(1)}(0) \cdot f^{(3)}(0) \cdot f^{(5)}(0) \cdot \dots \cdot f^{(19)}(0)$
 כאשר $f^{(n)}(x)$ מציין את הנגזרת ה- n של $f(x)$.
 פתרון: מתקיים

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^k \cos(2x) & k = 4n + 1 \\ -2^k \sin(2x) & k = 4n + 2 \\ -2^k \cos(2x) & k = 4n + 3 \\ 2^k \sin(2x) & k = 4n \end{cases}$$

ולכן

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 2^k & k = 4n + 1 \\ 0 & k = 4n + 2 \\ -2^k & k = 4n + 3 \\ 0 & k = 4n \end{cases}$$

ולכן

$$f^{(1)}(0) \cdot f^{(3)}(0) \cdot f^{(5)}(0) \cdot \dots \cdot f^{(19)}(0) = 2 \cdot (-2)^3 \cdot (2^5) \cdot \dots \cdot (-2^{19}) =$$

$$(-1)^5 2^{1+3+5+\dots+19} = -2^{\frac{10(1+19)}{2}} = -2^{100}$$

16. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\frac{\arccos\left(\frac{x^2}{25}\right)}{\ln(2^{3x-8}-1)}}$
 פתרון: מתקיים כי תחום ההגדרה של $\arccos t$ הוא $[-1, 1]$ ולכן נדרוש כי
 $-1 < \frac{x^2}{25} < 1$, כלומר $-25 < x^2 < 25$, וזה מתקיים אם $x \in [-5, 5]$.
 בנוסף, $0 \leq \arccos\left(\frac{x^2}{25}\right) \leq \pi$, כלומר המונה תמיד אי-שלילי. לכן כדי שיתקיים
 $\frac{\arccos\left(\frac{x^2}{25}\right)}{\ln(2^{3x-8}-1)} \geq 0$ נדרוש כי $\ln(2^{3x-8}-1) > 0 = \ln 1$ כלומר $2^{3x-8} - 1 > 1$.
 מתקיים:

$$2^{3x-8} > 2^1 \iff 3x - 8 > 1 \iff x > 3$$

ולכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $(3, 5]$.

17. נתונה פונקציה $f(x) = x^2 + bx + c$ כאשר b, c פרמטרים ממשיים ונתון כי x_1, x_2 הם שורשים של $f(x)$.
 בנוסף, נתונה פונקציה $g(x) = x^2 + cx + b$. נסמן ב- α_1, α_2 את השורשים של $g(x)$.
 בחרו את הטענה הנכונה:
 פתרון: על פי נוסחאות וייטה עבור פונקציה $f(x)$ מתקיים כי
 $x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$
 על פי נוסחאות וייטה עבור פונקציה $g(x)$ מתקיים כי $\alpha_1 + \alpha_2 = -c, \alpha_1 \cdot \alpha_2 = b$
 מתקיים

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = c^2 - 2b = (x_1x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)$$

18. נתון טרפז $ABCD$. נסמן: $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{u}$.
 על הצלע AB נמצאת נקודה M המקיימת $|\vec{AM}| = \frac{3}{4}|\vec{AB}|$.
 מתקיים: $\vec{CM} \perp \vec{MD}$ ו- $|\vec{v}| = \frac{1}{2}|\vec{u}|$. חשבו את $\cos(\angle BAD)$.
 פתרון: נבטא את הוקטורים $\vec{CM}, \vec{MD}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{MD} = -\frac{3}{4}\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{CM} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v}$$

מתקיים:

$$0 = \left(\vec{v} - \frac{3}{4}\vec{u}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v}\right) = \frac{1}{4}\vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{3}{16}|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 + \frac{3}{4}\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{3}{16}|\vec{u}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{u}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{7}{16}|\vec{u}|^2$$

לכן $\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{7}{16}|\vec{u}|^2$ מצד שני,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\angle BAD) = \frac{1}{2}|\vec{u}|^2\cos(\angle BAD)$$

ולכן $\cos(\angle BAD) = \frac{7}{8}$ כלומר $\frac{1}{2}|\vec{u}|^2\cos(\angle BAD) = \frac{7}{16}|\vec{u}|^2$

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ המקיימת $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. נתון בנוסף ש- $f(x)$ מקבלת מקסימום ב- $x = \frac{\pi}{2}$. חשבו: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2f(x)-1}{2x-\pi}$.
 פתרון: על פי הנתון מתקיים כי $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, לכן על פי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2f(x)-1}{2x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

20. נתון מספר ממשי a המקיים $3^{2^a}(a^3 - a^2) = 1$ וגם שהגבול $\lim_{x \rightarrow a} \ln|x| \cdot \cot(x) = L$ קיים וסופי. חשבו את L .
 פתרון: נפתור את המשוואה:

$$3^{2^a}(a^3 - a^2) = 1 = 3^0 \Rightarrow 2^a(a^3 - a^2) = 0$$

ולכן $a = 1$ או $a = 0$.

עבור $a = 0$ נקבל כי $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot \cot x$ לא קיים ולכן $a = 1$. ולכן מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln|x| \cdot \cot(x) = \ln|1| \cdot \cot(1) = 0$$