תשובות

תשובה מספר 1

המונה מתאפס אם $z^6 = 1$, וידוע כי סכום שורשי היחידה הוא 0. $z = 1$ אינו פתרון של המשוואה מכיוון שהוא מאפס את המכנה, ומכאן שסכום הפתרונות הוא 1- .

תשובה מספר 2

$$f'(x) = (\tan^2 x)' + (\cos 2x)' = \left(2 \cdot \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) + (-2 \cdot \sin 2x) = 2\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \sin 2x\right)$$

נמצא את שורשי הנגזרת בתחום שבין $-\frac{\pi}{2}$ ל- $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos^3 x} - 2\cos x\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{או} \quad 1 - 2\cos x \cdot \cos^3 x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad \cos x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

(בתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ הקוסינוס חיובי)

ומכאן $t = 4$.

תשובה מספר 3

$x^2 + 2xy + y^2 = 0$ שקול ל: $(x+y)^2 = 0$

מכאן $x + y = 0$, וזאת משוואת קו ישר.

תשובה מספר 4

$$x^5 - 2x^4 + kx^2 - 8 = (x - 2)(x^4 + kx + 2k) + 4k - 8$$

לכן, על פי הנתון, $4k - 8 = 4$, ומכאן $k = 3$.

תשובה מספר 5

נקודת ההשקה היא $(2,0)$, ולכן $f(2) = 0$.

שיפוע המשיך בנקודה זו הינו:

$$f'(2) = a + \frac{6}{2^2} = a + \frac{3}{2}$$

ועל פי המשוואה $-5x + 2y + 10 = 0$, אותו שיפוע שווה ל- $\frac{5}{2}$.

לכן $a + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, כלומר $a = 1$.

בנוסף:

$$f(2) = 2a + c - \frac{6}{2} = 2 + c - 3 = c - 1$$

כאמור $f(2)=0$, ולכן: $c = 1$

תשובה מספר 6

בתחום $[-1,0]$:

$$f(x) = |x^2 - 2x - 8| = |(x - 4)(x + 2)| = (4 - x)(x + 2) = -x^2 + 2x + 8$$

באותו תחום $f(x)$ עולה (לפרבולה $-x^2 + 2x + 8$ יש נקודת מקסימום ב- $x = 1$).

לכן תמונת הפונקציה היא: $[f(-1), f(0)] = [5,8]$

בתחום $[0,2]$:

$$f(x) = |x^2 + 2x - 8| = |(x + 4)(x - 2)| = (x + 4)(2 - x) = -x^2 - 2x + 8$$

באותו תחום $f(x)$ יורדת (לפרבולה $-x^2 - 2x + 8$ יש נקודת מקסימום ב- $x = -1$).

לכן תמונת הפונקציה היא: $[f(2), f(0)] = [0,8]$

בתחום $[2,3]$:

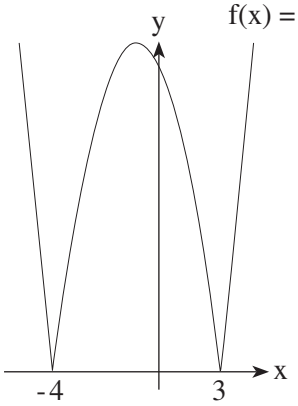
$$f(x) = |x^2 + 2x - 8| = |(x + 4)(x - 2)| = (x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8$$

באותו תחום $f(x)$ עולה (לפרבולה $x^2 + 2x - 8$ יש נקודת מינימום ב- $x = -1$).

לכן תמונת הפונקציה היא: $[f(2), f(3)] = [0,7]$

כתוצאה מהנ"ל תמונת $f(x)$ בתחום $[-1,3]$ היא $[0,8]$.

תשובה מספר 7



$f(x) = |2(x+4)(x-3)|$

סקיצת הפונקציה היא:

(החלק השלילי של הפרבולה $2(x+4)(x-3)$,

שהוא בין $x = -4$ ל-$x = 3$, מתהפך)

נקודת המקסימום המבוקשת היא הנקודה הסימטרית

לנקודת המינימום של הפרבולה $2(x+4)(x-3)$ ביחס לציר ה-x.

מכאן: $a = \frac{-4+3}{2} = -0.5$

$$f(-0.5) = |2(-0.5+4)(-0.5-3)| = |2(0.25+1.5-2-12)| = |2\cdot(-12.25)| = 24.5$$

ולכן $a + b = 24$

תשובה מספר 8

$$a_n = \int_0^n \frac{x(n-x)}{n^3}dx = \int_0^n \frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3}dx = \left[\frac{x^2}{2n^2} - \frac{x^3}{3n^3}\right]_0^n = \left(\frac{n^2}{2n^3} - \frac{n^3}{3n^3}\right) - (0-0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

הסדרה קבועה וערכה הוא $\frac{1}{6}$.

תשובה מספר 9

$$x + 1 = \log_{\frac{1}{3}}(3^x + 1) + \log_3(13\cdot 3^x - 3)$$

$$\log_3(3^{x+1}) = -\log_3(3^x+1) + \log_3(13\cdot 3^x - 3) = \log_3\left(\frac{13\cdot 3^x - 3}{3^x+1}\right)$$

$$3^{x+1} = \frac{13\cdot 3^x - 3}{t+1}$$

נסמן $t = 3^x$

המשוואה הנ"ל הופכת ל:

$$3t = \frac{13t-3}{t+1}$$

$$3t^2 + 3t = 13t - 3$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

מכאן:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \frac{5 \pm 4}{3}$$

$$t_1 = 3 \qquad t_2 = \frac{1}{3}$$

לכן:

$$x_1 = \log_3 t_1 = 1$$

$$x_2 = \log_3 t_2 = -1$$

בסוף מקבלים: $x_1 \cdot x_2 = -1$

תשובה מספר 10

$$f(x) = 2\cos^2 x - \sin x$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) - \cos x = -\cos x\,(4\sin x + 1)$$

בתחום $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, נגזרת זו מתאפסת רק כאשר $4\sin x + 1 = 0$, כלומר כאשר $\sin x = -\frac{1}{4}$.

נסמן ב-a את הפתרון של משוואה זו.

$\cos a = +\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (הפונקציה cos חיובית באותו תחום).

לכן:

$$f(a) = 2\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{4} = \frac{15}{8} + \frac{2}{8} = \frac{17}{8}$$

וקל לבדוק שהנקודה $\left(a,\frac{17}{8}\right)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.

תשובה מספר 11

נסמן ב-x ו-y את שני המספרים.

על פי הנתון מתקיים:

$$y = x^2 \quad \text{ו-} \quad x = y^2$$

$$y = (y^2)^2 = y^4 \quad \text{ו-} \quad x = (x^2)^2 = x^4$$

x חייב להיות שונה מ-0 (כדי ש-x ו-y יהיו שונים זה מזה), ולכן $x^3 = 1$; מאותה סיבה, $y^3 = 1$.

השורשים השלישיים של היחידה הם 1, $\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ו- $\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

הערך 1 אינו קביל (כי אז $x = y$).

לעומת זאת, $\text{cis}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ וגם $\text{cis}^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

לכן אחד המספרים הוא בהכרח: $\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

תשובה מספר 12

גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x כאשר:

$$\ln^2 x - \ln x = 0$$

$$\ln x\,(\ln x - 1) = 0$$

$$\ln x = 0 \quad \text{או} \quad \ln x = 1$$

$$x = 1 \quad \text{או} \quad x = e$$

לכן A ו-B הן הנקודות (1,0) ו- (e,0).

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x}$$

מינימום הפונקציה מושג כאשר $2\ln x - 1 = 0$ כלומר כאשר $\ln x = \frac{1}{2}$, או $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

ערך המינימום הוא: $\ln^2\sqrt{e} - \ln\sqrt{e} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

מכאן שיעורי הנקודה C: $\left(\sqrt{e}, -\frac{1}{4}\right)$

על פי הנ"ל שטח המשולש ABC הוא:

$$\frac{(e-1)\cdot\frac{1}{4}}{2} = \frac{e-1}{8}$$

תשובה מספר 13

נפתור את המשוואה הנתונה:

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$$

$$z^2 + 1 = (2\cos\alpha)\cdot z$$

$$z^2 - (2\cos\alpha)\cdot z + 1 = 0$$

הדיסקרימיננט של משוואה זו הוא:

$$(2\cos\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha = (2i\cdot\sin\alpha)^2$$

מכאן שני הערכים האפשריים של z הם:

$$\frac{2\cos\alpha \pm 2i\cdot\sin\alpha}{2} = \cos\alpha \pm i\cdot\sin\alpha$$

כלומר z שווה ל-$\text{cis}(\alpha)$ או ל-$\text{cis}(-\alpha)$.

לכן z^n שווה ל-$\text{cis}(n\alpha)$ או ל-$\text{cis}(-n\alpha)$, כך שבכל מקרה החלק הממשי של z^n הוא $\cos(n\alpha)$.

תשובה מספר 14

נסמן ב-q את מנת הסדרה הנתונה.

$$a_3 + a_6 + a_9 = q^2(a_1 + a_4 + a_7) = q^2 \cdot 25 = 49$$

מכאן: $q = +\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$ (מכיוון שכל איברי הסדרה חיוביים, q הוא חיובי)

סכום שאר איברי הסדרה הוא:

$$a_2 + a_5 + a_8 = \frac{7}{5}(a_1 + a_4 + a_7) = \frac{7}{5} \cdot 25 = 35$$

לכן סכום תשעת איברי הסדרה הוא:

$$25 + 35 + 49 = 109$$

תשובה מספר 15

הנקודה D נמצאת על BC, ולכן קיים מספר k כך ש- $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BD} = (\alpha + 2, \beta - 3, \gamma - 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 - (-2), 7 - 3, -2 - 1) = (2, 4, -3)$$

לכן:

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 2k \\ \beta - 3 = 4k \\ \gamma - 1 = -3k \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} \alpha = 2k - 2 \\ \beta = 4k + 3 \\ \gamma = -3k + 1 \end{cases}$$

מכיוון ש-OD ניצב ל-OA, הנקודה D נמצאת על המישור הניצב ל-OA והמכיל את O. נסמן את מישור זה ב-M.

$$\overrightarrow{OA} = (1, 3, 5)$$

לכן משוואת M היא: $1(x - 0) + 3(y - 0) + 5(z - 0) = 0$

כלומר: $x + 3y + 5z = 0$

מכיוון ש-D נמצאת על M, מתקיים:

$$\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0$$

מכאן: $2k - 2 + 3(4k + 3) + 5(-3k + 1) = 0$

$$2k - 2 + 12k + 9 - 15k + 5 = 0$$

$$-k + 12 = 0$$

$$k = 12$$

לכן: $\alpha + \beta + \gamma = 2k - 2 + 4k + 3 - 3k + 1 = 3k + 2 = 3 \cdot 12 + 2 = 38$

תשובה מספר 16

מהשוויון $f(g(x)) = x$ נובע:

$$x = \ln\frac{g(x)}{1-g(x)}$$

$$e^x = \frac{g(x)}{1-g(x)}$$

$$e^x\,(1-g(x)) = g(x)$$

$$e^x - e^x\,g(x) = g(x)$$

$$e^x = e^x\,g(x) + g(x)$$

$$e^x = (e^x+1)g(x)$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

תשובה מספר 17

דרך א:

מכיוון ש- x_1 הוא פתרון של המשוואה (I) מתקיים: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

מכיוון ש- c שונה מ- 0, גם x_1 שונה מ- 0

לכן אפשר לחלק את שני האגפים של השוויון הנ"ל ב- x_1^2. מקבלים: $a + \frac{b}{x_1} + \frac{c}{x_1^2} = 0$

ומכאן: $c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + a = 0$

כלומר $\frac{1}{x_1}$ הוא פתרון של המשוואה (II).

מאותה סיבה גם $\frac{1}{x_2}$ הוא פתרון של (II).

דרך ב':

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

נסמן ב-x_3 ו-x_4 את פתרונות המשוואה (II).

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2c} = \frac{a}{c}\cdot x_{1,2}$$

בנוסף, ידוע כי $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. מכאן: $x_{3,4} = \frac{x_{1,2}}{x_1x_2} = \frac{1}{x_{2,1}}$

כלומר קיים מספר k כך שפתרונות המשוואה (II) הם $\frac{k}{x_1}$ ו- $\frac{k}{x_2}$

תשובה מספר 18

מהמשוואה הראשונה נובע:

$$(x + y)^2 = (2 - z)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4 - 4z + z^2$$

משוויון זה נחסר את המשוואה השנייה של המערכת הנתונה:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = 4 - 4z + z^2 - 4 - z^2$$

$$x^2 + y^2 = -4z$$

הביטוי $x^2 + y^2$ הוא אי-שלילי.

בנוסף הוא לא יכול להיות 0, כי אז $x = y = 0$, כך שהמשוואה $2xy = 4 + z^2$ הופכת ל-$z^2 = -4$.

מכאן $x^2 + y^2 = -4z$ הוא חיובי, כך ש-z הוא שלילי.

תשובה מספר 19

על פי הנתון, $a_2 = \frac{k+1}{k-1}$

$$a_3 = \frac{\frac{k+1}{k-1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} - 1} = \frac{\frac{2k}{k-1}}{\frac{2}{k-1}} = \frac{2k}{2} = k$$

מכאן, עבור כל n: $a_{2n+1} = k$ $\qquad a_{2n} = \frac{k+1}{k-1}$

בפרט, גם $a_{4n+1} = k$

לעומת זאת, המספרים $3n + 2$, $5n - 1$ ו-$7n - 2$ יכולים להיות זוגיים או אי-זוגיים לפי הערך של n, ולכן הסדרות a_{3n+2}, a_{5n-1} ו- a_{7n-2} אינן קבועות בהכרח (הן קבועות רק אם $k = \frac{k+1}{k-1}$).

תשובה מספר 20

$$x^3 - 125 = x^2 - 4x - 5$$

$$x^3 - 5^3 = (x - 5)(x + 1)$$

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = (x - 5)(x + 1)$$

לכן הפתרון הממשי של המשוואה הנתונה הוא 5. שני הפתרונות האחרים מקיימים את המשוואה:

$$x^2 + 5x + 25 = x + 1$$

$$x^2 + 4x + 24 = 0$$

הדיסקרימיננט של משוואה זו הוא: $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 16 - 96 = -80 = \left(\sqrt{80} \cdot i\right)^2 = \left(2\sqrt{20} \cdot i\right)^2$

הפתרונות המרוכבים המבוקשים הם:

$$x_{1,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{20} \cdot i}{2} = -2 \pm \sqrt{20} \cdot i$$

לכן הערך המוחלט של החלק המדומה שלהם הוא $\sqrt{20}$.

תשובה מספר 21

דרך א':

$$f'(x) = (\cos^{-2}x)' = -2\cos^{-3}x \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \cdot (1 + \tan^2 x) \cdot \tan x$$

דרך ב':

$f(x) = 1 + \tan^2 x$; לכן:

$$f'(x) = (1 + \tan^2 x)' = 0 + 2\tan x \cdot (\tan x)' = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x) = 2(1 + \tan^2 x) \cdot \tan x$$

תשובה מספר 22

נבודד את y במשוואת המישור הראשון: $y = -3x - z - 2$

נציב במשוואת המישור השני ונקבל:

$$-2x + 3(-3x - z - 2) + 3z - 5 = 0$$

$$-2x - 9x - 3z - 6 + 3z - 5 = 0$$

$$-11x = 11$$

$$x = -1$$

מכאן $y = 3 - z - 2 = 1 - z$

לכן הישר L מוגדר על-ידי המשוואות: $x = -1$; $y = \frac{z-1}{-1}$

נמצא שתי נקודות על הישר L, למשל: $P_1 = (-1,0,1)$, $P_2 = (-1,1,0)$

ונחפש מישור $Ax + By + Cz + D = 0$ המכיל את שתי הנקודות וכן את הנקודה (0,0,0).

המישור מכיל את (0,0,0) לכן $D = 0$.

מהצבת P_1 נקבל $A = C$

מהצבת P_2 נקבל $A = B$

לכן מבין האפשרויות המוצעות, המשוואה המתארת את המישור היא $x + y + z = 0$.

תשובה מספר 23

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 2^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 4^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k 1^{n-k}$$

על פי נוסחת הבינום, $a_n = (-4+1)^n = (-3)^n$

מכאן: $a_1 = -3$; $a_2 = 9$; $a_3 = -27$; $a_4 = 81$; $a_5 = -243$; $a_6 = 729$.

לכן הערך הקטן ביותר של n שעבורו מתקיים $a_n > 100$ הוא 6.

תשובה מספר 24

נסמן ב-b את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

שיעור ה-y של אותה נקודה הוא: $f(b) = \frac{1}{b}$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $\left(b,\frac{1}{b}\right)$ היא:

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) = -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b} = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$$

הנקודה $(a,0)$ נמצאת על אותו משיק. מכאן:

$$-\frac{a}{b^2} + \frac{2}{b} = 0$$

$$-a + 2b = 0$$

$$b = \frac{a}{2}$$

מכאן השטח המבוקש:

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1}{x} - \left(-\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}\right)dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1}{x} + \frac{4x}{a^2} - \frac{4}{a}dx = \left[\ln x + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{4x}{a}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= (\ln a + 2 - 4) - \left(\ln\frac{a}{2} + \frac{1}{2} - 2\right) = (\ln a - 2) - (\ln a - \ln 2 - 1.5) = \ln 2 - 0.5$$

תשובה מספר 25

$$f'(x) = 2x \cdot \arctan x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{1 + x^2} = 2x \cdot \arctan x + 1$$

לביטויים $2x$ ו-$\arctan x$ יש אותו סימן. לכן $2x \cdot \arctan x$ הוא אי-שלילי ו-$2x \cdot \arctan x + 1$ הוא חיובי.

מכאן הפונקציה $f(x)$ עולה ממש, ולכן היא חד-חד ערכית.

בנוסף:

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

לכן:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2) \cdot \arctan x = +\infty$$

באותה מידה:

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

לכן:

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^2) \cdot \arctan x = -\infty$$

הפונקציה $f(x)$ רציפה בכל מספר (כי היא גזירה מכל מספר), עם $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; כתוצאה מכך היא גם פונקציה על.